

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ

М. Г. БЕРНАДИНЕР, В. М. ЕНТОВ

Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей



*Издательство «Наука»
Москва 1975*

Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. Б е р н а д и н е р М. Г., Е н т о в В. М. М., «Наука», 1975.

Аномальные жидкости, отличающиеся по своим реологическим характеристикам от ньютоновской вязкой жидкости, широко используются в техно-логических процессах, связанных с переработкой полимеров и суспензий; естественными аномальными жидкостями являются и многие нефти, биологические жидкости и коллоидные растворы, подобные раствору глинистых частиц в воде. Поэтому изучение движения аномальных жидкостей в пористой среде имеет большое прикладное значение для нефтяной и газовой промышленности и химической технологии.

Интенсивное изучение фильтрации аномальных жидкостей на протяжении последних 10—15 лет привело к накоплению большого объема эмпирических данных, а также к выработке основных представлений теории. Результаты эти разбросаны по журнальной литературе, сводное изложение их отсутствует. Предлагаемая монография призвана восполнить пробел. В ней дано систематическое изложение моделей, математических методов и результатов теории фильтрации однородных и неоднородных аномальных жидкостей; наряду с этим содержится также раздел, посвященный физике течения аномальных жидкостей через пористые среды и рассмотрены вопросы, связанные с применением теории к задачам разработки нефтяных месторождений.

Книга будет полезна специалистам в области теории фильтрации и ее приложений, в первую очередь разработки нефтяных месторождений, а также студентам и аспирантам соответствующих специальностей. Илл. 84. Табл. 3. Библ. 276 назв.

Ответственный редактор

проф. Г. И. БАРЕНБЛАТТ

Предисловие

Развитие теории фильтрации неразрывно связано с ее техническими приложениями, и в первую очередь с задачами гидротехники и теории разработки нефтяных и газовых месторождений. Именно здесь накапливаются факты и наблюдения, которые заставляют пересматривать и обобщать установившиеся положения теории. Верно и обратное — детальное исследование новых гидродинамических моделей методами механики позволяет правильно оценивать роль тех или иных явлений в технических задачах, находить пути использования особенностей физической системы «жидкость — пористая среда» или бороться с вредными проявлениями этих особенностей.

Теория фильтрации аномальных жидкостей не является в этом отношении исключением. Первоначальный интерес к ней возник с появлением отдельных фактов, указывающих на нарушение линейного закона фильтрации — закона Дарси — в области малых скоростей фильтрации. Со временем стало ясно, что это не редкое исключение, а обычное явление для определенных классов систем «жидкость — пористая среда». К ним, в частности, относится движение воды в глинах и глинизированных породах и движение нефтей, содержащих значительные количества асфальтено-смолистых веществ, а также парафинистых нефтей при пониженных температурах. Иными словами, речь идет о жидкостях, которые либо сами по себе обладают псевдопластическим реологическим поведением, либо приобретают его при взаимодействии с пористой средой. Качественно было ясно, что подобные реологические аномалии могут кардинально изменить картину движения жидкости в пористой среде и картину вытеснения одной жидкости другой (например, нефти водой). Особенно важно это для нефтяных месторождений, где большая часть пласта занята зоной малых градиентов давления.

Однако количественные эффекты не могли быть достаточно надежно оценены на основе аппарата теории фильтрации, следующей закону Дарси. Как это часто бывает, решение этого вопроса оказалось возможным не введением определенных поправочных коэффициентов в существующие расчетные соотношения, а путем построения последовательной гидродинамической теории фильтрации аномальных жидкостей. Важнейшее значение имела при

этом указанная еще в 1940 г. С. А. Христиановичем возможность перенесения в теорию фильтрации разработанных методов газовой динамики. Таким путем удалось решить значительное число плоских задач нелинейной фильтрации. Анализ этих решений позволяет сделать определенные общие выводы о степени влияния реологических аномалий жидкостей на характер течения в пористых средах.

Теорию вытеснения аномальных жидкостей оказалось возможным построить как прямое развитие существующей теории вытеснения «обычных» вязких жидкостей. И здесь анализ результатов расчета гидродинамических моделей позволяет сделать общие заключения в отношении их прототипов — тех реальных процессов вытеснения нефти водой, которые лежат в основе разработки большинства нефтяных месторождений.

Указанные направления теории фильтрации аномальных жидкостей являются наиболее разработанными и потому занимают основное место в предлагаемой книге. Вместе с тем в книгу включены значительно менее изученные вопросы, в которых имеются пока лишь частные результаты (гл. VIII—IX). Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей интенсивно развивается в последнее десятилетие, в основном в Советском Союзе. Не будучи в состоянии детально изложить все имеющиеся результаты, авторы дали сравнительно полную библиографию работ в этой области. Основное же содержание книги базируется на работах авторов по теории фильтрации вязко-пластических жидкостей (фильтрации с предельным градиентом давления). Однако использованные при этом методы могут найти применение и для исследования систем с реологическими аномалиями другого вида.

Рассматриваемые в книге вопросы лежат на стыке нелинейной механики и ее приложений к задачам разработки нефтяных месторождений. Это предопределило построение книги и характер изложения.

Изложение рассчитано на читателя, знакомого с основами теории фильтрации (все необходимые сведения можно найти в книгах [11, 19, 31, 121, 172, 220] или обзорах [137, 177, 225]).

Излагаемые в книге исследования выполнены в основном в Институте проблем механики АН СССР, Институте механики МГУ, Институте геологии и разработки горючих ископаемых. В них на разных этапах принимали участие М. Г. Алишаев, Т. А. Маляхова, Л. Я. Николаева, М. Г. Одишария, А. Е. Сегалов, Ф. Д. Турецкая; ряд расчетов выполнен И. И. Ереминой.

Отдельные постановки задач и результаты обсуждались с Ю. В. Желтовым, В. М. Рыжиком, Р. Л. Салгаником. Большую роль в придании проведенным исследованиям практической направленности сыграли советы и замечания А. Х. Мирзаджанзаде. Все основные моменты работы неоднократно с большой пользой для авторов обсуждались с Г. И. Баренблаттом. Всем указанным лицам авторы приносят глубокую благодарность.

Глава I

Физика течения аномальных жидкостей через пористые среды

В книге, посвященной гидродинамической теории фильтрации аномальных жидкостей, изложение физики процессов, обуславливающих фильтрационные аномалии, поневоле оказывается фрагментарным. Однако оно необходимо для того, чтобы дать читателю возможность увидеть конкретное содержание используемых в дальнейшем моделей и правильно оценивать область приложимости следующих из них выводов. Надо отметить, что далеко не все еще ясно в описываемой области. Ряд явлений не имеет адекватного и общепринятого описания; экспериментальные данные зачастую противоречат друг другу или допускают неоднозначную трактовку. В отдельных моментах точка зрения авторов расходится с существующими воззрениями; читатель найдет их изложение в указанной ниже литературе.

§ 1. Аномальные жидкости

Под аномальными (или неньютоновскими) жидкостями понимаются жидкости, не следующие модели линейно-вязкой жидкости [178, 203, 235], для которой имеет место линейная изотропная связь между тензорами напряжений σ_{ij} и скоростей деформаций* ϵ_{ij} [113, 193]

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}, \quad (1.1)$$

где p — изотропное давление, μ — вязкость, δ_{ij} — единичный тензор, или, в упрощенной трактовке применительно к простому сдвигу, линейная связь между касательным напряжением τ и скоростью сдвига $\dot{\gamma}$

$$\tau = \mu\dot{\gamma}. \quad (1.2)$$

Такое «определение от противного» весьма широко и охватывает различные классы жидкостей. Чтобы несколько уточнить его, заметим, что определение вязкой жидкости (1.1) содержит, по существу, три допущения:

* Мы ограничиваемся здесь случаем несжимаемой жидкости.

1) мгновенное значение девиатора тензора напряжений определяется мгновенным значением девиатора тензора скоростей деформации;

2) эти два тензора-девиатора соосны;

3) связь между этими двумя тензорами линейна.

Для жидкостей, которые мы будем называть аномальными, нарушается по крайней мере одно из трех указанных допущений. Наиболее простой случай аномальных жидкостей — это нелинейно-вязкие жидкости, для которых нарушается лишь допущение 3), т. е. девиатор тензора напряжений однозначно определяется девиатором тензора скоростей деформаций; они соосны, но зависимость между ними является нелинейной. Именно, для нелинейно-вязких жидкостей интенсивность касательных напряжений T есть нелинейная функция интенсивности скоростей деформации (скоростей сдвига) Γ

$$T = (1/2 s_{ij}s_{ij})^{1/2}, \quad \Gamma = (2\dot{\gamma}_{ij}\dot{\gamma}_{ij})^{1/2}, \quad T = F(\Gamma). \quad (1.3)$$

Здесь s_{ij} — компоненты девиатора напряжений, $\dot{\gamma}_{ij}$ — компоненты девиатора скоростей деформаций.

Очевидно, зависимость τ от $\dot{\gamma}$ может быть снята в простейшем вискозиметре (например, ротационном вискозиметре, реализующем круговое течение Куэтта), в котором имеет место деформация простого сдвига, в виде кривой течения

$$\tau = F(\dot{\gamma}), \quad \dot{\gamma} = \varphi(\tau). \quad (1.4)$$

Нас будут прежде все интересовать структурирующиеся нелинейно-вязкие жидкости, способные образовывать твердообразные структуры, разрушающиеся при увеличении интенсивности деформации. Такие жидкости характеризуются псевдопластическим поведением; кривая $\dot{\gamma} = \varphi(\tau)$ для них выпукла к оси τ : $\varphi'' > 0$. Крайним проявлением псевдопластического поведения является вязко-пластическое поведение, описываемое известной моделью Бингама — Шведова

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\mu}(\tau - \tau_0) \quad (\tau > \tau_0); \quad \dot{\gamma} = 0 \quad (\tau \leq \tau_0). \quad (1.5)$$

Величина τ_0 называется предельным напряжением сдвига. Второе соотношение (1.5) чаще указывает на пренебрежение соответствующими скоростями деформаций, чем на полное отсутствие течения. При необходимости различить эти два случая мы будем говорить об условном и истинном предельном напряжении сдвига.

Часто используется для описания экспериментальных данных, особенно в небольшом диапазоне изменения параметров, и степенная зависимость вида

$$\dot{\gamma} = K\tau^n. \quad (1.6)$$

Гораздо более сложные последствия имеет нарушение первого из перечисленных выше 8 допущений. Если напряжения в жидкости зависят не только от текущего значения тензора скоростей деформации, но и от предыстории деформирования данного жидкого элемента, вполне ею определяясь, то такая жидкость называется «простой» (см. например, [235]). Простыми являются упруго-вязкие жидкости, особенности поведения которых могут быть поняты на простейшей линейной модели Максвелла, в которой связь между τ и $\dot{\gamma}$ при простом сдвиге определяется дифференциальным уравнением

$$\dot{\gamma} = 1/\mu (\tau + \theta \dot{\tau}), \quad (1.7)$$

где величина θ называется временем релаксации. Очевидно, при медленном изменении напряжений тело Максвелла ведет себя как вязкая жидкость, а при быстром — как упругое тело с модулем сдвига $G = \mu/\theta$.

Существует большое число линейных и нелинейных моделей вязко-упругого поведения жидкостей, вопрос об их соответствии реальным объектам во многих случаях неясен. Для нас будет важно в последующем то обстоятельство, что при движении упругих жидкостей могут накапливаться большие упругие деформации. В результате этого упругая жидкость по-разному ведет себя в сдвиговом течении (например, в зазоре вискозиметра), когда ее эффективная вязкость падает со скоростью сдвига и при вытягивании элемента жидкости в одном направлении (с одновременным сокращением его в другом). В последнем случае при достаточно больших скоростях деформации «продольная вязкость» жидкости, определяемая по отношению действующего в сечении напряжения к скорости удлинения, резко возрастает. Подробнее с особенностями движения вязко-упругих жидкостей можно познакомиться по книгам [118, 124, 178, 235].

Наконец, укажем, что в некоторых случаях нам приходится сталкиваться с системами и явлениями, не укладывающимися и в понятие «простой жидкости». Мы имеем здесь в виду в первую очередь системы, носящие характер коллоидных растворов, внутренняя структура которых может перестраиваться под действием обменных и физико-химических процессов. К таким системам относятся водо-глинистые растворы, ряд растворов полимеров и, по-видимому, некоторые нефти. К сожалению, в большинстве случаев мы не располагаем адекватным описанием таких систем и вынуждены ограничиваться лишь качественной характеристикой их поведения.

§ 2. Пористые среды

Пористая среда в теории фильтрации характеризуется в первую очередь двумя геометрическими параметрами: пористостью m (относительной долей объема среды, занятой сообщающимися меж-

ду собой порами) и проницаемостью k . Проницаемость — постоянная среды, определяющая поток вязкой жидкости через данную среду в соответствии с законом Дарси (см. ниже, § 3). Проницаемость имеет размерность площади и измеряется обычно в дарси. Очевидно, проницаемость можно связать с «внутренним масштабом» пористой среды — размером зерен среды d , размером пор l и т. д. Так, по широко распространенной формуле Козени — Кармана для зернистых сред

$$k = C \frac{m^3 d^2}{(1 - m)^2}, \quad C \approx 0,5 \cdot 10^{-2}, \quad (2.1)$$

с другой стороны, по М. Д. Миллионщикову, внутренний масштаб непосредственно определяется как

$$d = \sqrt{k/m}. \quad (2.2)$$

Введенные геометрические характеристики пористой среды, обычные для «классической» теории фильтрации, выражают в осредненном (интегральном) смысле представление о чисто геометрической роли скелета пористой среды. Такое представление является неполным по меньшей мере в двух аспектах: во-первых, в особо тонкопористых телах силовые поля вблизи поверхности пористого скелета могут оказывать непосредственное влияние на движение жидкости; во-вторых, взаимодействие фильтрующей жидкости с материалом скелета может приводить к изменению свойств жидкости (например, ее вязкости) или пористой среды (например, изменение проницаемости глинизированной среды из-за набухания глины). Указанные эффекты взаимодействия ведут к фильтрационным аномалиям и рассматриваются ниже, хотя, строго говоря, в этом случае речь идет уже не о фильтрации аномальной жидкости, а об аномальном поведении системы «жидкость — пористая среда».

§ 3. Нелинейные законы фильтрации

Линейный закон фильтрации (закон Дарси) устанавливает пропорциональность и коллинеарность векторов скорости фильтрации w и градиента давления p (массовые силы не учитываются)

$$w = - \frac{k}{\mu} \text{grad } p. \quad (3.1)$$

Закон Дарси может быть выведен на основе предположения о том, что в поровом пространстве пористой среды происходит медленное (стоксовое, безынерционное) движение вязкой жидкости. Поэтому естественное ограничение закона Дарси состоит в том, что он применим для достаточно малых скоростей фильтрации. Нарушения становятся заметными, если число Рейнольдса

фильтрационного течения

$$Re = w d \rho / \mu, \quad w = |w|, \quad (3.2)$$

где d — характерный размер микроструктуры среды (размер зерна или размер поры), приближается к единице. Учет инерционных эффектов приводит к двучленному закону фильтрации

$$\text{grad } p = -\frac{\mu}{k} w (1 + \beta w). \quad (3.3)$$

Это соотношение справедливо для большинства жидкостей; оно подтверждается многочисленными экспериментами [177, 220, 258] и имеет качественное теоретическое обоснование [126, 127].

В наиболее важных приложениях теории фильтрации — гидротехнике, теории движения природных жидкостей в пористых горных породах, теории процессов разработки нефтяных и газовых месторождений — выход в область больших скоростей осуществляется лишь локально — вблизи угловых точек области фильтрации или вблизи скважин. Структура течения вблизи таких особых точек проста, и учет нелинейных эффектов в этом случае производится достаточно просто, по существу, на основании решения одномерных задач. Таким образом учитываются, например, дополнительные потери, связанные с квадратичным членом в (3.3) вблизи газовых скважин [177].

Иной характер носят отклонения от закона Дарси при малых скоростях фильтрации. Они обязаны своим происхождением либо несоответствию реологического поведения жидкости модели линейно-вязкого (ньютоновского) тела, либо взаимодействию между жидкостью и твердым скелетом, приводящим к изменению свойств приповерхностных слоев жидкости и возникновению дополнительных сил сопротивления движению. Зачастую оба эти эффекта переплетаются.

Приведем некоторые наиболее важные примеры:

1. Ряд нефтей, представляющих собой сложную смесь углеводородов, содержит тяжелые компоненты — парафины и смолисто-асфальтеновые вещества, способные образовывать твердообразную структуру. В результате эти нефти характеризуются псевдопластическим или вязко-пластическим реологическим поведением, главным образом при низких температурах. Основные особенности, связанные с таким поведением, можно описать, приняв в качестве основной модель вязко-пластического тела Бингама — Шведова (1.5).

Если вязко-пластическая жидкость движется в пористой среде, характеризуемой внутренним масштабом d , то из соображений размерности и изотропии

$$\text{grad } p = -\frac{\mu w}{d^2} f(\omega), \quad \omega = \frac{\tau_0 d}{\mu w} \quad (3.4)$$

(инерционными эффектами пренебрегаем).

При больших скоростях роль пластического сопротивления, очевидно, должна уменьшаться, в пределе ($w \rightarrow \infty$) соотношение (3.4) переходит в закон Дарси

$$\text{grad } p = -\frac{\mu w}{k}; \quad k = d^2/f(0).$$

Напротив, при малых скоростях вязкое сопротивление становится пренебрежимо малым, так что

$$f(\omega) \approx c/\omega, \quad \omega \rightarrow \infty.$$

Поэтому положим приближенно

$$d^2 f(\omega) = 1/k(1 + \lambda/w); \quad \lambda = c\tau_0 d/\mu \quad (3.5)$$

и получим закон фильтрации с предельным градиентом

$$\text{grad } p = -\frac{\mu}{k} w \left(1 + \frac{\lambda}{w}\right) = -\frac{\mu w}{k} - \frac{\mu G w}{k w}; \quad (3.6)$$

$$G = c_1 \frac{\tau_0}{d} \approx \alpha \frac{\tau_0}{\sqrt{k}}. \quad (3.7)$$

Если градиент давления меньше предельного G , то движение отсутствует, т. е. соотношение (3.6) следует дополнить условием

$$w = 0 \quad (|\text{grad } p| \leq G). \quad (3.8)$$

Описание фильтрации вязко-пластической жидкости при помощи закона фильтрации с предельным градиентом было введено в работе [130], там же было установлено соотношение (3.7), (см. также [132]).

Сходное соотношение можно получить и из рассмотрения простейшей (капиллярной) модели пористой среды. Характерный вид закона фильтрации (3.6) иллюстрирует рис. 1.1, где показана зависимость расхода Q от перепада давления Δp при фильтрации вязко-пластической жидкости (смесь масел и паров и брайтсток) в образцах различной проницаемости, соответствующая закону фильтрации с предельным градиентом давления [199].

В тех случаях, когда фильтрующаяся жидкость характеризуется псевдопластическим поведением, зависимость скорости фильтрации от градиента давления имеет вид кривой, выпуклой к оси $|\text{grad } p|$, но проходящей через начало координат. Для подобных систем эффективная подвижность $(k/\mu)_{\text{эф}}$, определяемая как отношение скорости фильтрации к соответствующему градиенту давления, падает с уменьшением скорости, при которой производится исследование. Имеется большое число примеров такого поведения, заполняющих всю область между предельными случаями линейного (закон Дарси) и вязко-пластического поведения (закон фильтрации с предельным градиентом). Характерный вид закона фильтрации для подобных систем иллюстрирует рис. 1.2,

где представлены данные по фильтрации высокосмолистой нефти при температурах 19, 23 и 26° С (кривые 1—3) [163]*.

Нелинейные эффекты, связанные со структурированием в нефтях, отмечены уже в работах М. М. Кусакова, П. А. Ребиндера и К. Е. Зинченко, обнаруживших изменение эффективной вязкости нефти при переходе к более дисперсной пористой среде [110], и Ф. А. Требина [202]. Однако лишь в последнее время накоплен материал лабораторных исследований, показывающий, что для нефтей ряда месторождений СССР характерно нелинейное реологическое поведение и соответствующие фильтрационные аномалии. К сожалению, эти результаты зачастую лишь качественно свидетельствуют о псевдопластическом характере исследуемых нефтей и не позволяют получить количественные характеристики (в частности, рассчитать предельный градиент давления). В большинстве реологических исследований используются капиллярные реометры. Измеряются перепад давления Δp и расход жидкости Q ; по этим величинам вычисляются касательное напряжение на стенке и скорость сдвига

$$\tau = \Delta p R / 2L, \quad \dot{\gamma} = 4Q / \pi R^3 \quad (3.9)$$

(R — радиус, L — длина капилляра) и строится кривая течения $\dot{\gamma}(\tau)$. Из-за трудности измерения малых перепадов и расходов

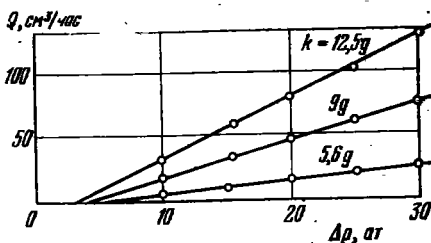


Рис. 1.1

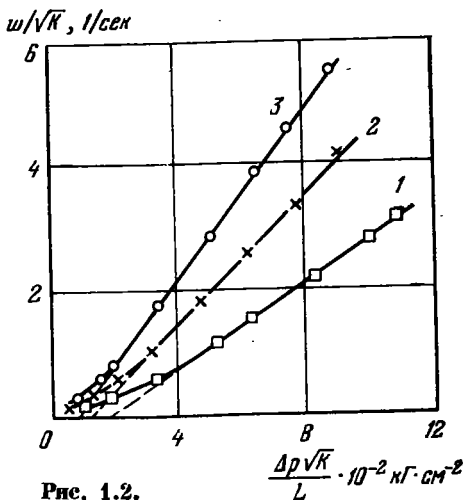


Рис. 1.2.

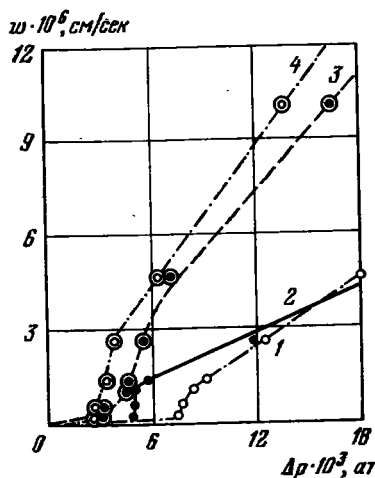


Рис. 1.3

* См. также [223, 224].

исследования, как правило, производятся при достаточно больших скоростях сдвига ($\dot{\gamma} \sim 10^{-1} \div 10 \frac{1}{сек}$); реологическая кривая в области малых скоростей сдвига получается путем экстраполяции. В то же время при изучении фильтрационных движений интерес представляют малые скорости сдвига порядка w/d . При $w \sim 10^{-4}$ см/сек; $d \sim 10^{-2}$ см имеем $w/d \sim 10^{-2} \frac{1}{сек}$, в ряде случаев представляют интерес и более низкие значения.

Таким образом, значительная часть реологических исследований нефтей не допускает переноса на фильтрационные движения. В связи с этим особое значение приобретают тщательные реологические исследования в области малых скоростей сдвига и те эксперименты, в которых непосредственно определялся закон фильтрации. Такие исследования для нефтей Башкирии проведены В. В. Девликамовым и З. А. Хабибулиным [49—58, 245], а для нефтей Ромашкинского месторождения — И. Е. Фоменко [209—213]. Некоторые из их результатов приведены в табл. 1.1 и на рис. 1.3, 1.4*.

Таблица 1.1 *

Месторождение	№ скважины	Предельное напряжение сдвига нефти, $\frac{дин}{см^2}$	Вязкость нефти с разрушенной структурой, спуз	Предельный градиент давления в образце песчаника $10^4 \frac{дин}{см^2} \left(\frac{ат}{м} \right)$
Таймурзинское	851	1,28	16,0	0,95
		0,980	—	—
		0,780	—	—
		0,200	59,0	—
Туймазинское (Александровская площадь)	198	0,100	8,0	0,075
		0,098	8,0	0,025
		0,090	9,0	0,018
		0,006	45,0	—
Арланское	952	0,069	8,0	<0,028
		0,057	8,0	<0,003
		0,030	9,0	<0,003
		0,020	10,0	<0,003

* Данные [32].

На рис. 1.3 показана зависимость скорости фильтрации нефти от перепада давления на стандартном образце пористой среды. Кривые 1 и 2 получены после остановки движения на различное время, кривые 3 и 4 — после интенсивного перемешивания [56].

* Ряд данных по фильтрации нефтей приводится в работах [3, 46, 48, 108, 133, 134, 163, 216, 247].

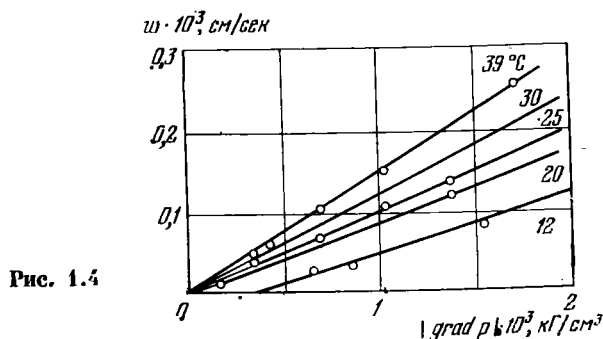


Рис. 1.4

На рис. 1.4 представлены данные по фильтрации нефти Ромашкинского месторождения при различных температурах [9]. Наконец, на рис. 1.5 показаны данные по величине предельного градиента давления для нефти Ромашкинского месторождения при различных температурах и различных проницаемостях образцов. Данные 8 получены на дегазированной нефти, 9 — при наличии в образце связанной воды; остальные относятся к фильтрации пластовой нефти при соответствующих температурах [209].

2. Другая важная область проявления нелинейных эффектов — движение воды в глинах и глинизированных породах. Именно здесь впервые было обнаружено наличие предельного (начального) перепада напора и введено понятие о предельном (начальном, пороговом) градиенте напора [180, 181, 208]. В данном случае нелинейные эффекты связаны со взаимодействием воды с глини-

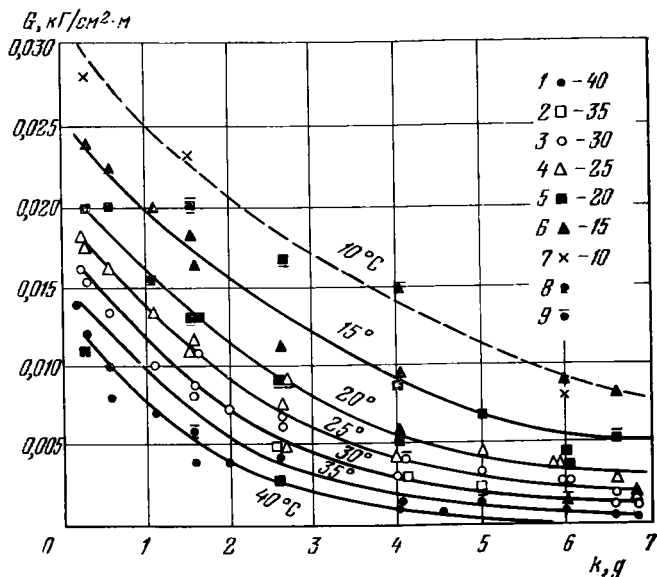


Рис. 1.5

тым материалом твердого скелета. Элементарные взаимодействия происходят на молекулярном уровне: полярные молекулы воды взаимодействуют с элементарными чешуйками глинистых материалов. Из-за малости глинистых чешуек, имеющих «атомную» толщину $\sim 10 \text{ \AA}$, поверхность взаимодействия глин с водой огромна, достигает $700 \text{ м}^2/\text{г}$ для монтмориллонита. Поэтому глинистые частицы способны присоединять значительное количество воды, увеличиваясь при этом в объеме, с другой стороны, они могут легко отрываться от основной массы материала, образуя коллоидный раствор, способный к структурированию. Поэтому в глинистых и глинизированных породах может происходить как иммобилизация воды, благодаря удержанию ее вблизи частиц глины, так и закупоривание пор коллоидом. Оба эффекта приводят к снижению эффективной проницаемости образца по мере снижения градиентов давления, т. е. «псевдопластическому» фильтрационному поведению. В зависимости от конкретных условий проявления нелинейных эффектов может быть различна, в частности, может существовать предельный градиент давления или его может не быть [102, 213, 238, 243, 250, 254, 255, 262, 263].

В ряде случаев линейное соотношение между скоростью фильтрации и градиентом давления сохраняется для глинизированных песчаников и даже для глин вплоть до очень низких градиентов давления [213, 262, 263]. На характер движения воды в глинах влияет наличие в воде растворенных веществ и состав глинистых частиц. Глинистые материалы по существу представляют собой естественные ионообменные материалы; они способны «отпускать» с поверхности в раствор ионы металлов, приобретая при этом фиксированный поверхностный заряд, взаимодействующий и с ионами раствора, и с полярными молекулами воды. Поэтому в формировании фильтрационного сопротивления существенную роль играют электрокинетические эффекты.

Таким образом, движение воды и водных растворов электролитов в глинистых породах составляет по существу предмет физико-химической гидродинамики. Если же ограничиться случаем, когда глинистые минералы и фильтрующаяся жидкость находятся в термодинамическом равновесии, то достаточно учесть нелинейность закона фильтрации.

Приведем некоторые характерные данные. На рис. 1.6 [233] показан типичный вид закона фильтрации воды в глине, хорошо аппроксимируемый законом фильтрации с предельным градиентом; рис. 1.7 [44] иллюстрирует зависимость w ($|\text{grad } p|$) для глинобетона с содержанием глинистых частиц 30, 20, 10% (кривые 1—3). Показанные на рис. 1.8 результаты [238] примечательны в том отношении, что относятся к реальным образцам песчаников с достаточно высокой проницаемостью (0,2—1,3 дарси) и малым содержанием глинистых фракций. Тем не менее, нелинейные эффекты выражены достаточно явно и закономерным образом снижаются по мере увеличения концентрации электролита (NaCl).

Наконец, рис. 1.9 [47] иллюстрирует динамику изменения эффективной проницаемости образца глинизированного песчаника при изменении состава фильтрующейся жидкости. Здесь t — время фильтрации, зачерненные точки относятся к рассолу, незачерненные — к дистиллированной воде.

Литература, посвященная в той или иной степени фильтрационным процессам в глинах, весьма обширна. Помимо указанных выше отметим еще работы обзорного и обобщающего характера [95, 244, 246], содержащие ряд сведений по нелинейной фильтрации и дополнительную литературу.

3. Когда рассматривается движение нефти или газа, то обычно неявно подразумевается, что наряду с этим в пласте содержится и некоторое количество воды; часто вода искусственно закачивается в пласт в качестве вытесняющего агента. Таким образом, поровое пространство заполнено не однородной жидкостью, а многофазной системой. Даже если каждая из фаз является линейно-вязкой ньютоновской жидкостью, сопротивление движению может зависеть от взаимного расположения фаз, а оно, в свою очередь, от гидродинамических сил. Это создает предпосылки для появления нелинейных фильтрационных эффектов при многофазном течении. Важным фактором в их формировании может явиться дополнительное сопротивление, возникающее при прохождении межфазных поверхностей через сужения поровых каналов.

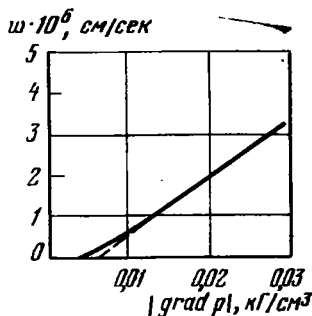


Рис. 1.6

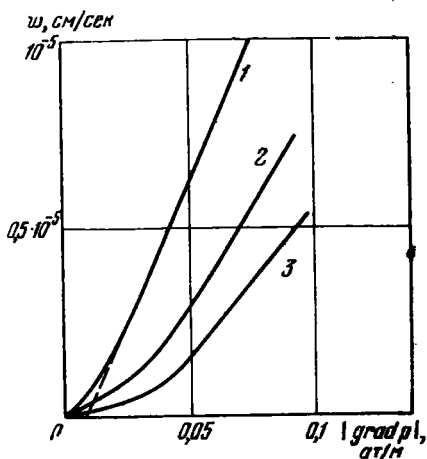


Рис. 1.7

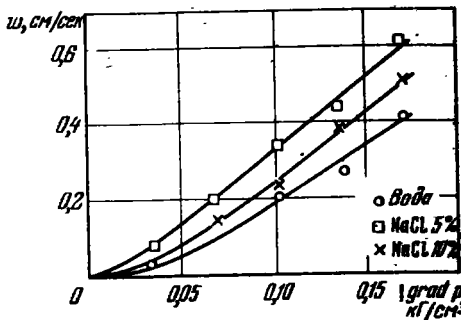


Рис. 1.8

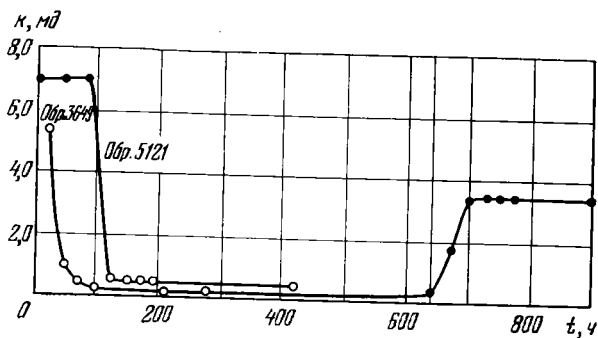


Рис. 1.9

Некоторые указания на реальность таких эффектов содержались уже в известной книге М. Маскета [121]; однако систематическое их исследование началось лишь в последние годы в Азинефтехим под руководством А. Х. Мирзаджанзаде. Приведем некоторые результаты этих исследований. На рис. 1.10 [163] показана зависимость Q (Δp) для движения керосина через смесь кварцевого песка (90%) с глиной (10%)*.

Аналогичные результаты получаются и для движения газа в глинизированных пористых средах, содержащих остаточную воду*. Типичные результаты опытов представлены на рис. 1.11 [13], где прямая 1 относится к пористой среде, составленной из 75% песка и 25% глины с 40% остаточной воды, прямая 2 — к 70% песка, 30% глины при 40% остаточной воды. Опыты показали, что до достижения некоторого порогового значения разности давлений, зависящего от содержания глины и воды, движения газа не было. После того как разность давлений достигла порогового значения, дальнейшее изменение расхода с хорошей точностью следовало линейной связи расхода газа Q с величиной Δp^2 . В контрольных опытах, когда при том же содержании воды (40%) глина заменялась маршаллитом (мелко раздробленный кварцевый песок), порога перепада давления обнаружено не было, и фильтрация газа следовала обычному закону Дарси.

Отметим, что нелинейность рассмотренного типа наблюдается и на естественных образцах [225], а также обнаруживается при исследовании газовых скважин (месторождение Газли).

Из приведенных результатов ясно, что аномальное фильтрационное поведение при движении углеводородных жидкостей может быть обусловлено наличием остаточной воды, особенно в глинизированных средах. Можно ожидать, что подобные явления играют существенную роль в процессах разработки нефтяных и газовых месторождений; к сожалению, имеющийся материал недостаточен для формулировки окончательных утверждений.

* Более подробные данные приведены в [128].

4. Большое внимание привлекают в последние годы особенности движения в пористых средах полимерных растворов. Изучение их важно как для процессов химической технологии, так и для нефтяной промышленности, где загущение воды полимерами используется для повышения эффективности вытеснения нефти водой. Как правило, используются растворы малой концентрации. Согласно стандартным реологическим измерениям их кривые течения слабо нелинейны и во многих случаях могут быть описаны степенным соотношением (1.6). Естественно ожидать, что и закон фильтрации для этих жидкостей будет степенным

$$\text{grad } p = - \frac{k}{\mu} w \left(\frac{w}{w_0} \right)^{\frac{1}{n}-1} = - C w^n \frac{w}{w} . \quad (3.10)$$

В некоторых случаях дело обстоит именно так. В качестве примера приведем данные по движению 2% раствора карбоксиметилцеллюлозы через искусственную пористую среду проницаемостью 445 дарси [272] (рис. 1.12). Незачерненные точки соответствуют зависимости скорости сдвига $\dot{\gamma}$ от напряжения τ , полученной в капиллярном реометре, а зачерненные — такой же зависимости для пористой среды из шариков диаметра d . При этом эффективные значения $\dot{\gamma}$ и τ подсчитываются для пористой среды по схеме Козени — Кармана [272]. Здесь $\dot{\gamma} = 3(1-m) \frac{w}{m^2 d}$, $\tau = md |\text{grad } p| / 15$, $m = 0,37$ — пористость среды. Отметим, что в подобных случаях фильтрационное сопротивление удается подсчитать по данным реометрии при помощи модели Козени — Кармана [270, 272].

Однако для других систем (растворы полиоксиэтилена, полиакриламида и др.) при повышении скорости фильтрации наблюдается резкое увеличение сопротивления, непредсказуемое по данным реометрии. Так, на рис. 1.13 [272]

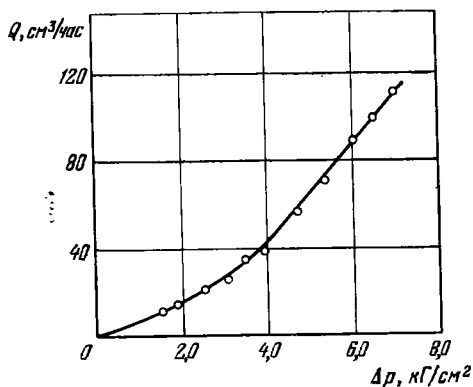


Рис. 1.10

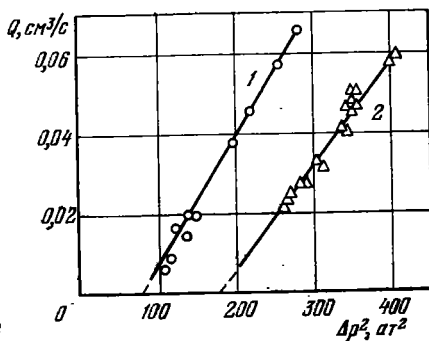


Рис. 1.11

точками показана зависимость измеренной по сопротивлению движению в пористой среде эффективной вязкости растворов полиоксэтилена от скорости фильтрации (эффективной скорости сдвига). Линиями показано изменение эффективной вязкости при движении в капилляре. Такое возрастание сопротивления может быть связано с вязкоупругостью жидкости [270]. При движении

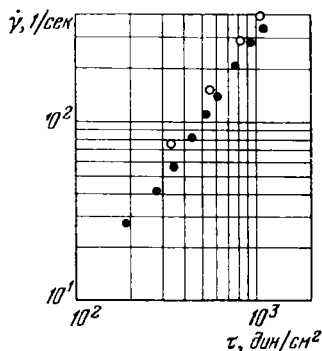


Рис. 1.12

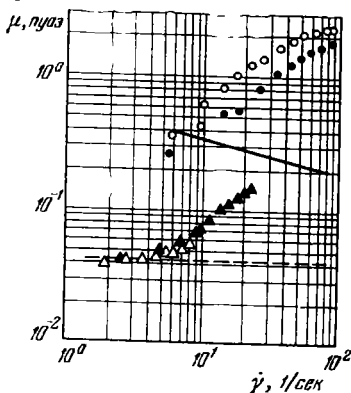


Рис. 1.13

в пористой среде элемент жидкости испытывает попеременное сжатие и расширение с периодом порядка d/w . Если время d/w становится сопоставимым со временем релаксации полимерного раствора θ или меньше него, то релаксация не успевает происходить и сопротивление движению резко возрастает. Попытка расчета этого эффекта имеется в работах [249, 276]. Детальное изложение сведений по нелинейной фильтрации полимерных растворов содержится в недавнем обзоре [272]*.

Отметим, что наряду с континуальной вязкоупругостью при фильтрации полимерных растворов важную роль играют неравновесные процессы, порождаемые адсорбцией макромолекул полимерного вещества на поверхности скелета пористого тела и удержанием сгустков полимера в сужениях поровых каналов. Сорбируемый средой (по тому или иному механизму) полимер значительно снижает проницаемость среды, а изменение содержания полимерного вещества в растворе изменяет вязкость фильтрующейся жидкости. Анализ имеющихся экспериментальных данных показывает, что часть полимера сорбируется скелетом необратимо, в то время как другая часть сорбируется обратимо, причем удерживаемое средой количество полимера возрастает с ростом скорости фильтрации. В результате оказывается, что стационарное состояние при фильтрации устанавливается лишь после

* См. также [234, 236, 242, 245, 256, 257, 267, 273].

длительного нестационарного процесса перехода к сорбционному равновесию. В ходе этого процесса сопротивление среды растет. Если движение жидкости прерывается, то начинается перераспределение сорбированного материала и сопротивление среды постепенно падает; при последующем движении сопротивление среды вновь возрастает. Это явление описано в исследованиях [236, 20], причем последняя работа содержит также теоретический анализ процесса изменения сопротивления; несколько другая схема описания предложена в работе [79].

Следствием сорбционных процессов является изменение сопротивления среды с ростом скорости фильтрации (сопоставляются только стационарные режимы). Возможно, именно в этом (а не в вязкоупругости) заключается причина характерных «псевдодилатантных» фильтрационных аномалий полимерных растворов.

Таким образом, вне зависимости от их физической природы фильтрационные аномалии приводят к нелинейности закона фильтрации, сопровождающейся зачастую неравновесными процессами, обусловленными перестройкой структуры системы «жидкость — пористая среда». В дальнейшем мы будем рассматривать математическую теорию фильтрации при нелинейном законе сопротивления, отвлекаясь от учета неравновесных процессов.

Особый интерес для приложений представляют отклонения от закона Дарси в области малых скоростей; их естественной моделью служит закон фильтрации с предельным градиентом. Именно он выбран в качестве основной модели нелинейной фильтрации в последующем изложении, хотя большинство результатов допускает обобщение и на другие формы закона фильтрации. Естественно начать анализ именно с этого, кардинально нелинейного и в то же время простого по форме случая.

Отметим, что имеется богатый промысловый материал, свидетельствующий о реальном проявлении нелинейных фильтрационных эффектов в пластовых условиях [45, 59—62, 75, 85, 90, 91, 97, 131, 133, 134, 163, 204, 214] и о роли этих эффектов в процессах разработки нефтяных и газовых месторождений. Этим вопросам посвящен ряд работ прикладного характера [73, 128, 131, 133, 134, 155, 156, 163]. Здесь же ограничимся изложением теории.

Глава II

Основные уравнения фильтрации аномальных жидкостей (нелинейной фильтрации) и их свойства

§ 1. Основные уравнения.

Аналогия с другими задачами математической физики

1. Систему уравнений нелинейной фильтрации образует уравнение закона фильтрации, которое запишем в виде

$$-\operatorname{grad} H = \Phi(w) w/w, \quad \Phi(0) \geq 0, \quad \Phi' \geq 0, \quad (1.1)$$

где

$$H = kp/\mu + kU/\mu \quad (1.2)$$

— обобщенный напор, U — потенциал внешних массовых сил, и уравнение неразрывности

$$\partial(m\rho)/\partial t + \operatorname{div} \rho w = 0, \quad (1.3)$$

дополненные уравнением состояния жидкости (движение считается изотермическим) и уравнением деформации среды при фиксированном внешнем напряженном состоянии (более подробно см. [19])

$$\rho = \rho(p), \quad \delta m = dp/K_m, \quad (1.4)$$

где δm — изменение пористости, K_m — модуль объемной деформации, t — время.

Если жидкость и пористая среда недеформируемы, то из (1.3) имеем

$$\operatorname{div} w = 0. \quad (1.5)$$

Система вида (1.1) ÷ (1.5) описывает также стационарные движения сжимаемой жидкости (газа) при условии, что градиент напора или некоторой его функции $p(H)$ удастся выразить через массовую скорость $\mathbf{j} = \rho w$; при этом H заменяется на P , а w на \mathbf{j} .

Если пористая среда и жидкость деформируемы слабо, то, линеаризуя уравнение (1.3), приходим к уравнению

$$\frac{m}{K} \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} w = 0; \quad K = m\rho \left[\frac{d(m\rho)}{d\rho} \right]^{-1}, \quad (1.6)$$

образующему вместе с (1.1) систему уравнений так называемого упругого режима фильтрации. Эти уравнения описывают нестационарные фильтрационные течения.

При рассмотрении плоских стационарных движений

$$H = H(x, y); \quad w\{u, v, 0\} = w(x, y),$$

как обычно, удобно использовать функцию тока ψ

$$\partial \psi / \partial x = -v, \quad \partial \psi / \partial y = u. \quad (1.7)$$

Задача теории фильтрации обычно состоит в определении полей давлений (напоров) и скоростей фильтрации в заданной области. Условия на границе области движения обычно имеют вид условий непротекания ($w_n = 0$, где w_n — нормальная к границе компонента скорости) или задания давления (напора). Для рассматриваемых ниже задач типично наличие в области фильтрации стоков и источников, моделирующих скважины, через которые из пласта добывается нефть или в пласт закачивается вода, служащая для вытеснения нефти.

2. Стационарные фильтрационные движения являются одним из процессов переноса. Поэтому тривиальными аналогами фильтрационных движений являются другие процессы переноса: диффузия, теплопроводность, электропроводность. Скорости фильтрации соответствует некоторый поток (поток диффундирующего вещества, поток тепла, плотность электрического тока), напору H — соответствующий «потенциал» (химический потенциал, температура, электрический потенциал), аналогом закона фильтрации является соотношение между градиентом потенциала и потоком для данного процесса переноса. Указанные аналоги фильтрационных движений являются, по существу, почти их физическими аналогами *. В случае линейной фильтрации это обстоятельство давно и успешно используется при моделировании задач теории фильтрации на электропроводной бумаге и в электролитических ваннах; весьма интересный способ моделирования плоских фильтрационных движений при нелинейной фильтрации на тонком слое светочувствительного полупроводникового материала предложен А. Я. Чилапом [221]. Аналогичную форму имеют также уравнения электро- и магнитостатики (см., например, [114]).

В самих задачах механики также имеется ряд аналогов уравнений фильтрационного движения. Фундаментальное значение для всего последующего изложения имеет указанная С. А. Христиановичем [218] аналогия с уравнениями газовой динамики. Действительно, для потенциального баротропного движения невязкой сжимаемой жидкости имеем (см., например, [29, 104, 125])

$$u = -\text{grad } \varphi; \quad \text{div } \mathbf{j} = 0; \quad \mathbf{j} = \rho \mathbf{u}; \quad \rho = \rho(p); \quad u = f(p) \quad (1.8)$$

* В некоторых случаях эта аналогия сохраняется и для нестационарных явлений, хотя условия подобия при этом и усложняются.

(последнее соотношение получается с учетом предыдущего из интеграла Бернулли). Здесь u — скорость газа, j — массовая скорость, φ — потенциал скорости. Исключая из трех последних уравнений p и ρ , получим

$$j = \rho(u)u, \quad \operatorname{div} j = 0, \quad u = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (1.9)$$

т. е. систему, аналогичную системе уравнений фильтрации (1.1) ÷ (1.5). Указанная аналогия позволяет переносить в задачи нелинейной фильтрации хорошо разработанные методы газовой динамики.

Указанные выше аналогии справедливы для произвольных пространственных движений. Ограничиваясь классом плоских фильтрационных движений, можно указать аналогии, относящиеся к задачам продольного сдвига нелинейно-упругих и пластических тел [71].

Укажем еще одну интересную аналогию. В ряде задач теории движения грунтовых вод и разработки нефтяных и газовых месторождений приходится учитывать приток жидкости (инфильтрацию) в рассматриваемый пласт. Для плоского движения в тонком пласте (см. гл. VIII) такой приток может трактоваться как внутренний распределенный источник (сток). При наличии инфильтрации уравнение неразрывности принимает вид

$$\operatorname{div} w = q \quad (1.10)$$

и система уравнений движения состоит из (1.1) и (1.10).

Наиболее важен и часто встречается случай постоянной инфильтрации: $q = \text{const}$. В этом случае фильтрационная задача имеет своим аналогом задачу кручения пластических тел [92, 197] и задачи движения нелинейно-вязких жидкостей по трубам.

§ 2. Основные свойства уравнений нелинейной фильтрации в стационарном случае

Уравнение (1.1) можно записать в виде

$$w = -\Psi(h)h/h, \quad h = \operatorname{grad} H, \quad (2.1)$$

где Ψ — функция, обратная Φ , причем $\Psi' \geq 0$, $\Psi \geq 0$. Подставляя (2.1) в (1.5), получим уравнение

$$\nabla(\Psi(|\nabla H|) \frac{\nabla H}{|\nabla H|}) = 0 \quad (2.2)$$

или в координатной форме

$$k(h^2) \nabla h + h \frac{dk(h^2)}{d(h^2)} \nabla h^2 = 0; \quad k = \Psi(h)/h. \quad (2.3)$$

Можно показать, что уравнение (2.2) является эллиптическим при любом законе фильтрации с $\psi > 0$ и $\Psi' > 0$. В случае закона

фильтрации с предельным градиентом $k = k' = 0$ при $h < G$, при этом уравнение (2.3) удовлетворяется тождественно любой функцией H с $|\text{grad } H| \leq G$.

В дальнейшем мы будем допускать вырождение уравнения только при $|\nabla H| \leq G$, т. е. в отсутствие движения. С учетом этого обстоятельства можно утверждать, что в области движения уравнение стационарной фильтрации является эллиптическим и для него справедлив принцип максимума [29, 129].

Решение уравнения (2.2) не может иметь максимума или минимума во внутренней точке области движения ($w = \Psi(|\nabla H| > 0$).

Очевидно, если уравнение (2.2) вырождается при $|\nabla H| < G$ из-за обращения в нуль k , в области вырождения (застойных зонах) принцип максимума может нарушаться. Это, однако, не имеет существенного значения, поскольку граничные точки застойных областей, не совпадающие с границей области, задаваемой извне, обладают следующим основным свойством внутренних точек. Пусть рассматривается область D с границей ∂D и на подобласти $D' \subset D$ происходит вырождение уравнения (2.2). Возьмем точку $M \in \partial D$ на границе D' ; тогда в области движения D/D' найдутся точки M^* и M_* такие, что $H(M^*) > H(M) > H(M_*)$. Это утверждение легко следует из того обстоятельства, что граница застойной зоны является поверхностью тока.

Обратимся теперь к плоской задаче, которая и будет в основном рассматриваться в дальнейшем. В этом случае, вводя функцию тока ψ и задавая вектор скорости его модулем w и углом θ , составленным им с осью x , имеем

$$\begin{aligned} \partial H / \partial x &= -\Phi(w) \cos \theta, & \partial H / \partial y &= -\Phi(w) \sin \theta, \\ \partial \psi / \partial x &= -w \sin \theta, & \partial \psi / \partial y &= w \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Очевидно, вводя вектор

$$h^* \{-\partial H / \partial y, \partial H / \partial x\}, \quad (2.5)$$

получим

$$\text{div } h^* = 0, \quad \text{grad } \psi = -\Psi(h^*) h^* / h^*, \quad (2.6)$$

т. е. вектор h^* можно рассматривать как скорость фильтрации, а функцию тока ψ — как напор некоторого фиктивного фильтрационного потока с «обратным» законом фильтрации $\Psi(h^*)$. Поэтому из сказанного выше следует, что функция тока ψ удовлетворяет эллиптическому уравнению, и для нее справедлив принцип максимума, который с учетом возможности образования застойных зон можно сформулировать следующим образом: функция тока не может принимать свои наибольшее и наименьшее значения во внутренних точках области движения или точках застойных зон, не прилегающих к границе области движения.

Выполним преобразование переменных, принимая за независимые переменные ψ и H , а за искомые функции w и θ . Переход от переменных x, y к переменным ψ, H является невырожденным при $w > 0$, поскольку якобиан

$$\frac{D(\psi, H)}{D(x, y)} = w\Phi(w) > 0. \quad (2.7)$$

Преобразованная система уравнений имеет вид

$$w\Phi(w) \frac{\partial w}{\partial \psi} = -\Phi^2(w) \frac{\partial \theta}{\partial H}, \quad \Phi \frac{\partial w}{\partial H} = w^2 \frac{\partial \theta}{\partial \psi}. \quad (2.8)$$

Это эллиптическая система, возможно вырождающаяся при $w = 0$.

Отсюда следует, что для любой области, в которой $w > 0$, w как функция ψ и H не может принимать во внутренних точках максимальное или минимальное значение.

Соответственно, и для θ имеем принцип максимума в его обычной форме: функция $\theta(\psi, H)$ не может иметь максимума или минимума во внутренних точках области. Далее, поскольку любую внутреннюю точку плоскости x, y , в которой $w \neq 0$, можно окружить областью, взаимно-однозначно отображающейся на плоскость ψ, H , мы приходим к выводу, что для w в плоскости x, y справедлив видоизмененный принцип максимума: функция $w(x, y)$ принимает свое максимальное значение на границе области; если минимальное значение $w = m > 0$, то оно также достигается на границе области; в этом случае для $\theta(x, y)$ также справедлив принцип максимума в обычной форме; минимальное значение $w = 0$ может достигаться внутри области — в критических точках или застойных зонах. Далее, в случае наличия внутри области критических точек или застойных зон принцип максимума для $\theta(x, y)$ справедлив в обычной форме для любой не содержащей их подобласти. В частности, исключим критические точки и застойные зоны, проведя «дополнительные границы». Тогда максимальное и минимальное значение $\theta(x, y)$ достигается на полной границе, получающейся объединением исходной и дополнительной границ.

§ 3. Вариационный принцип для задач стационарной нелинейной фильтрации и некоторые его следствия

Задачам теории фильтрации можно дать также вариационную формулировку, рассматривая их как задачи минимизации функционала определенного вида. Для фильтрации, следующей закону Дарси, напор и функция тока удовлетворяют уравнению Лапласа, а соответствующий вариационный принцип есть принцип Дирихле. Ниже приведена вариационная формулировка для задач нелинейной фильтрации. Соответствующие вариационные

принципы получены в [71] для плоских течений на основе аналогии между уравнениями фильтрации и теории пластичности, где такие принципы хорошо изучены (см., например, [89, 152, 153, 266]).

Формально полученные в [71] результаты применимы только к плоским фильтрационным потокам в однородной среде в отсутствие массовых сил. Однако можно непосредственно доказать их применимость для пространственных течений с массовыми силами в неоднородных средах. Именно, допустим, что рассматривается течение в пространственной области D , ограниченной поверхностью C , на части C_n которой задан напор, а на части C_w — нормальная составляющая скорости фильтрации w_n . Внутри области D выполняются уравнения

$$-\operatorname{grad} H = \Phi(w, \rho) w/w - g; \quad H = \frac{k}{\mu} p; \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div} w = 0. \quad (3.2)$$

Здесь $\rho = \rho(x, y, z)$ — параметр сопротивления среды, так что $\partial\Phi/\partial\rho \geq 0$, g — вектор (вообще говоря, не потенциальный) безразмерных массовых сил. Пусть $H(x, y, z)$ — некоторое поле напора, а w — произвольное поле скоростей, удовлетворяющее уравнению (3.1). Имеет место тождество

$$\int_D w \operatorname{grad} H dV = \int_D \nabla (wH) dV = \int_C w_n H dS. \quad (3.3)$$

Пусть теперь задано некоторое решение системы (3.1) — (3.2). Составим функционал

$$D^* \doteq \int_D [D(w, \rho) - gw] dV + \int_C w_n H dS, \quad (3.4)$$

где

$$D(w, \rho) = \int_0^w \Phi(w, \rho) dw. \quad (3.5)$$

Возьмем теперь произвольное поле скоростей w' , удовлетворяющее уравнению неразрывности (3.2), и составим для него функционал (3.4).

Имеем

$$\begin{aligned} D^*(w) - D^*(w') &= \int_D \int_{w'}^w \Phi(u, \rho) du dV + \int_C (w_n - w'_n) H dS - \\ &- \int_D g(w - w') dV. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Преобразуя поверхностный интеграл по формуле (3.3) и используя (3.1), получим

$$\begin{aligned} \int_C (w_n - w'_n) H dS &= \int_D \operatorname{grad} H (w - w') dV = \\ &= - \int_D \Phi (w, \rho) \frac{w (w - w')}{w} dV + \int_D g (w - w') dV. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (3.6), получим

$$\begin{aligned} D^* (w) - D^* (w') &= \int_D \left[\int_{w'}^w \Phi (u, \rho) du - \Phi (w, \rho) \frac{w (w - w')}{w} \right] dV = \\ &= \int_D \left[\int_{w'}^w \Phi (u, \rho) du - \Phi (w, \rho) w + \Phi (w, \rho) \frac{w w'}{w} \right] dV \leqslant \\ &\leqslant \int_D \left[\int_{w'}^w \Phi (u, \rho) du - \Phi (w, \rho) (w - w') \right] dV. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Легко убедиться, что в силу монотонного возрастания $\Phi (u, \rho)$ как функции u выражение в квадратных скобках неположительно вне зависимости от знака разности $w - w'$. Таким образом,

$$D^* (w) \leqslant D^* (w'), \quad (3.8)$$

причем равенство достигается только при $w \equiv w'$.

Таким образом, доказан принцип минимума полного потенциала диссипации $D^* (w)$ для движения в неоднородной пористой среде при наличии массовых сил.

Отметим, что в выражение (3.5) входят только граничные значения напора H .

Рассмотрим далее функционал

$$R^* (H) = \int_D R (h, \rho) dV, \quad (3.9)$$

где $\mathbf{h} = \operatorname{grad} H - \mathbf{g}$, $R (h, \rho) = \int_0^h \Psi (h, \rho) dh$, (3.10)

а Ψ — функция, обратная к Φ . Рассмотрим наряду с решением H системы (3.1) — (3.2) некоторое произвольное кусочно-гладкое поле H' с градиентом \mathbf{h}' , удовлетворяющее тем же граничным условиям. Имеем

$$\begin{aligned} R^* (H) - R^* (H') &= \int_D \int_{h'}^h \Psi (\xi, \rho) d\xi dV \leqslant \int_D (h - h') \Psi (h, \rho) dV \leqslant \\ &\leqslant \int_D (\mathbf{h} - \mathbf{h}') \frac{\mathbf{h}}{h} \Psi (h, \rho) dV = \int_D (\operatorname{grad} H - \operatorname{grad} H') w dV = \\ &= \int_C (H - H') w_n dS = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Таким образом, истинное распределение напора минимизирует дополнительный потенциал диссипации R^* по отношению ко всем другим распределениям, удовлетворяющим тем же граничным условиям.

Замечание 1. Из вывода (3.11) ясно, что сопоставляемые распределения могут принимать различные значения на непроницаемой части границы ($w_n = 0$).

Замечание 2. Доказанные вариационные принципы справедливы и для фильтрации с предельным градиентом (с образованием застойных зон). Из них следует единственность распределения скоростей в данной конечной области, если заданы граничные условия указанного выше типа. Что касается распределения напора, то оно единственным образом определено в области $|h| > G$, но не единственно, вообще говоря, в области $|h| \leq G$. Последнее очевидно физически и следует также из того обстоятельства, что $\Psi(h) = 0$ при $|h| \leq G$, и соответствующая область не дает вклада в дополнительный потенциал диссипации.

Если, напротив, считать принцип минимума потенциала диссипации (или дополнительного потенциала диссипации) исходным, то из него можно получать уравнения фильтрационного движения.

Будем искать векторную функцию $w(x, y, z)$, реализующую минимум функционала $D^*(w)$, определенного соотношением (3.4), при дополнительном условии $\operatorname{div} w = 0$.

Вводя лагранжев множитель $\lambda(x, y, z)$, приведем задачу к задаче о безусловном минимуме функционала

$$\int_D [D(w, \rho) - gw + \lambda \operatorname{div} w] dV + \int_C H w_n dS. \quad (3.12)$$

Полагая вначале $\delta w|_C = 0$, получим уравнения Эйлера

$$\Phi(w, \rho) w/w - g - \operatorname{grad} \lambda = 0, \quad \operatorname{div} w = 0. \quad (3.13)$$

Пусть теперь w удовлетворяют системе уравнений (3.13).

Тогда вариация (3.12) сводится к виду

$$\int_C (\lambda + H) \delta w_n dS,$$

откуда $\lambda = -H|_{C_H}$. Таким образом, лагранжев множитель с точностью до знака совпадает с напором H .

Допуская существование поверхности разрыва свойств, легко убедиться, что давление на этой поверхности непрерывно. Нетрудно также включить граничные условия в запись функционала таким образом, чтобы экстремум функционала реализовывался бы именно на функции, удовлетворяющей граничным условиям.

* $\delta w_n \equiv 0$ на C_w .

Вариационные принципы могут быть использованы для получения численных решений уравнений нелинейной фильтрации [28]; пока же мы ограничимся некоторыми простыми, но важными следствиями из общих свойств уравнений нелинейной фильтрации.

§ 4. Некоторые следствия из общих свойств уравнений нелинейной фильтрации

1. Рассмотрим фильтрационное течение в области D , имеющей вид отрезка трубки тока, ограниченной боковой поверхностью C (поверхностью тока) и сечениями A_1 и A_2 , являющимися поверхностями постоянного напора, т. е.

$$w_n|_C = 0; \quad H|_{A_1} = H_1 = \text{const}; \quad H|_{A_2} = H_2 = \text{const}. \quad (4.1)$$

Допустим, что закон фильтрации имеет вид

$$\Phi(w, \rho) = \rho w^k; \quad k = \text{const}. \quad (4.2)$$

Согласно § 3 имеем (с учетом возможности обобщения на пространственный случай)

$$(H_1 - H_2) Q = \int_D h w^{k+1} dV, \quad (4.3)$$

где Q — полный расход фильтрационного потока. Рассмотрим теперь некоторое другое поле фильтрационных сопротивлений $\rho^* \geq \rho$ и отвечающее ему при прежних значениях напора на граничных поверхностях A_1 и A_2 поле скоростей w^* . Поле скоростей w^* является допустимым для исходной области, поэтому получаем

$$\begin{aligned} \int_D D(w, \rho) dV - Q(H_1 - H_2) &\leq \int_D D(w^*, \rho) dV - Q^*(H_1 - H_2) \leq \\ &\leq \int_D D(w^*, \rho^*) dV - Q^*(H_1 - H_2). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Неравенства (4.4) справедливы при любом законе фильтрации $\Phi(w, \rho)$; в случае степенного закона (4.2) имеем $D(w) = \rho w^{k+1} / (k+1)$, так что

$$\int_D D(w, \rho) dV = \frac{1}{k+1} (H_1 - H_2) Q. \quad (4.5)$$

Поэтому из (4.4) получаем

$$Q^* \leq Q. \quad (4.6)$$

С физической точки зрения этот результат очевиден; он означает, что при увеличении фильтрационного сопротивления в какой-либо части области фильтрации расход при том же перепаде напора уменьшается. Отсюда вытекает возможность получения

оценок для расхода фильтрационного потока путем замены его течением с более простой геометрией. Так, если в потоке произвольным образом указать направление линий тока (что равносильно разбиению потока непроницаемыми перегородками на трубы тока), то при заданном распределении давления на границах области движения расход только уменьшится. Допустим, что рассматривается движение жидкости в слоисто-неоднородном пласте, ограниченном параллельными слоям непроницаемыми плоскостями. Вообще говоря, благодаря нелинейности закона фильтрации в пласте может происходить обмен жидкостью между слоями. Проведем теперь между слоями непроницаемые перегородки. Тогда движение будет происходить послойно, параллельно слоям (схема предельно-анизотропного пласта с бесконечно малой поперечной проводимостью).

Согласно сказанному выше, расход при таком течении будет не больше, чем в исходном. Чтобы получить верхнюю оценку для расхода, допустим, что в поток введены весьма тонкие идеально проницаемые отрезки, перпендикулярные направлению слоев. Тогда получим схему предельно-анизотропного пласта с бесконечной поперечной проводимостью. По доказанному такая схема (тоже легко рассчитываемая) дает завышенное значение расхода.

В задачах теории фильтрации, следующей закону Дарси, указанные схемы предельно анизотропного грунта, введенные Г. К. Михайловым [136], нашли широкое применение, подобные же приемы широко применялись и в работах И. А. Чарного. Приведенный вывод может рассматриваться как доказательство законности применения подобных приемов и их обобщение*.

Частным случаем доказанного утверждения является то, что при «вдавливании» внутрь области фильтрации непроницаемых границ расход фильтрационного потока уменьшается, при «вдавливании» же поверхностей постоянного напора расход увеличивается. Очевидно, по своему существу эти утверждения близки к используемым при оценках предельных нагрузок жестко-пластических тел (см. [92, 152]), что отвечает предельному случаю $k = 0$.

2. Несколько более слабые результаты можно получить для произвольного закона фильтрации, описываемого возрастающей функцией $\Phi(w)$.

* Применение вариационного принципа для получения двусторонних оценок в задачах фильтрации было впервые, по-видимому, предложено П. М. Белашом [22]. Наиболее общая форма вариационного принципа, пригодная для течений со свободной поверхностью в анизотропной неоднородной среде, дана Мауэрсбергером [251—253]. Однако непосредственная проверка показывает, что предложенная Мауэрсбергером форма учета граничных условий на свободной поверхности неверна. Таким образом, вопрос о такой вариационной формулировке задач теории фильтрации, которая была бы эквивалентна задаче о течении со свободной (неизвестной) поверхностью, до сих пор не решен.

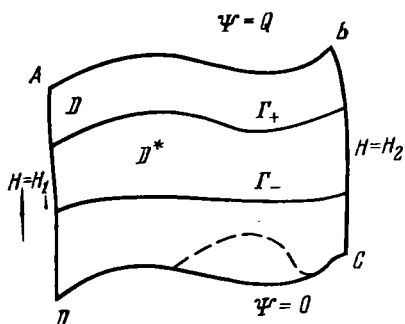


Рис. 2.1

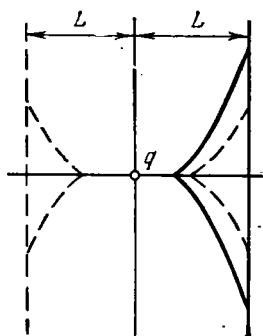


Рис. 2.2

Поскольку для напора H и функции тока ψ справедлив в области течения принцип максимума, эти функции не могут принимать максимальные и минимальные значения внутри области движения или на тех ее границах, где их нормальные производные равны нулю (линия тока для напора H и линия постоянного напора для функции тока ψ в случае плоской задачи). Рассмотрим теперь плоское фильтрационное течение в области D , ограниченной двумя непроницаемыми линиями AB и CD и двумя линиями постоянного напора AD и BC . Наряду с этим рассмотрим область D' , получающуюся из D «вдавливанием» линии тока DC (см. рис. 2.1). Пусть, далее, расход Q одинаков в обоих случаях. Тогда справедливо следующее утверждение.

Во всех точках области D' имеет место неравенство

$$\psi' \leq \psi \quad (4.7)$$

и, как следствие этого, во всех точках границы AB

$$w' \geq w, \quad (4.8)$$

перепад напора на границе не уменьшается —

$$H' \geq H \quad (4.9)$$

и, наконец, на «недеформированных» участках линии тока CD

$$w' \leq w. \quad (4.10)$$

Такого рода утверждения в теории фильтрации, следующей закону Дарси, доказаны Г. Н. Положим [170, 171] и использованы им для получения оценок расхода при фильтрации в области со сложной геометрией. В случае равномерно эллиптических систем (что соответствует $0 < \varepsilon \leq \Phi(w) \leq E < \infty$, $\Phi(0) = 0$, где ε

и E — постоянные) соответствующий результат следует из исследований М. А. Лаврентьева [111]. Чтобы доказать высказанное утверждение без указанных ограничений, допустим обратное. Пусть $\psi' > \psi$ в некоторой точке $M \in D'$. Тогда найдется подобласть $D^* \subset D$, $M \in D^*$, в которой $\psi' > \psi$, отделенная от остальной части области D линией Γ , на которой $\psi' = \psi$. Линия Γ не может быть замкнутой, поскольку тогда в D^* в силу единственности $\psi' = \psi$. Аналогичным образом, если допустить, что область D^* примыкает лишь к одной линии постоянного напора, то D^* оказывается областью того вида, для которого имеет место единственность течения, так что $w \equiv w^*$ внутри D^* . Из равенства полей скорости и граничных значений ψ и ψ' следует $\psi \equiv \psi'$ в D^* в противоречие с предположением. Таким образом, остается лишь допустить, что область D^* должна иметь вид отрезка полосы, соединяющей линии равного напора (рис. 2.1). При этом соображения о единственности неприменимы, поскольку разность напоров H_1 и H_2 , вообще говоря, может измениться при переходе от задачи к задаче.

Однако, если рассмотреть в полосе D^* взаимное течение (т. е. течение, получающееся поворотом вектора скорости на угол $1/2 \cdot \pi$, см. § 2), то линии AD и BC превратятся для него в «непроницаемые границы», а линии Γ_+ и Γ_- в линии, на которых заданы значения «напора». Отсюда уже следует единственность течения, а потому и равенство $\psi \equiv \psi'$ в D^* , в противоречие с предположением. Таким образом, всюду в D^* имеем $\psi' \leq \psi$, тогда на AB

$$w = |\partial\psi/\partial n| \leq w' = |\partial\psi'/\partial n|;$$

$$\partial H/\partial s = \Phi(w) \leq \partial H'/\partial s = \Phi(w').$$

Отсюда следуют утверждения (4.8), (4.9). Аналогичным образом доказывается и утверждение (4.10). Из (4.7) следует также, что все линии тока либо остаются на месте, либо вдавливаются в сторону неподвижной линии тока. Заметим, наконец, что все результаты остаются в силе для полосы между двумя линиями тока бесконечной протяженности.

Легко видеть, что если «вдавленный» участок линии тока лежит внутри застойной зоны $\psi = \text{const}$ для исходного течения, то во всех предыдущих оценках имеет место равенство.

Аналогичные рассуждения показывают, что при «вдавливании» внутрь области движения одной из линий равного напора расход не может уменьшиться, равно как и скорость фильтрации во всех точках оставшейся неизменной линии равного напора.

Приведенные выше утверждения, физически вполне очевидные, позволяют строить оценки для решений в тех случаях, когда трудно получить точное решение.

3. Важное качественное следствие из полученных результатов состоит в том, что для фильтрационных течений, ограничен-

ных двумя линиями тока (течение в конечной или бесконечной полосе, возможно, переменной ширины), «вдавливание» внутрь области одной из линий тока при сохранении расхода может привести лишь к уменьшению застойных зон, примыкающих к другой линии тока. В частности, если таких застойных зон не было, то они не могут и появиться.

П р и м е р. Застойная зона, возникающая вблизи стенки при течении от источника интенсивности q , расположенного на расстоянии L от стенки (сплошные линии), больше застойной зоны, создаваемой тем же источником, расположенным между двумя стенками (пунктир) (рис. 2.2). Поскольку вторая задача допускает точное решение, отсюда следует нижняя оценка застойной зоны в первой задаче.

Плоская задача нелинейной стационарной фильтрации

§ 1. Основные соотношения

Рассмотрим плоскую задачу нелинейной фильтрации несжимаемой жидкости, описываемую уравнениями

$$\operatorname{grad} H = -\Phi(w) w/w, \quad \Phi(w) \geq 0, \quad \Phi'(w) \geq 0; \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} w = 0, \quad H = H(x, y), \quad w = w(x, y), \quad w \in \{u, v\}. \quad (1.2)$$

Введем функцию тока

$$\partial\psi/\partial x = -v, \quad \partial\psi/\partial y = u \quad (1.3)$$

и угол θ , составляемый вектором w с положительным направлением оси x декартовой системы координат xOy

$$u = w \cos \theta, \quad v = w \sin \theta. \quad (1.4)$$

Используя обнаруженную им аналогию системы (1.1) — (1.2) с уравнениями дозвуковой газовой динамики, С. А. Христианович [218] (см. также [172, 177]) указал способ сведения этой системы к последовательному решению двух линейных систем (каноническая система):

$$\partial s/\partial v - \partial\theta/\partial\mu = 0; \quad \partial s/\partial\mu + \partial\theta/\partial v = 0; \quad (1.5)$$

$$\partial H/\partial\mu = -L \frac{\partial\psi}{\partial v}; \quad \partial H/\partial v = L \frac{\partial\psi}{\partial\mu}, \quad (1.6)$$

где

$$s(w) = \ln \left(\int \sqrt{\frac{\Phi'(w)}{w\Phi(w)}} dw \right), \quad L(w) = \frac{\Phi(w)}{w} \sqrt{\frac{\Phi(w)}{w\Phi'(w)}}. \quad (1.7)$$

Система (1.5) — (1.6) не меняет своего вида при конформном преобразовании плоскости μ, v , т. е. при введении таких новых независимых переменных μ^* и v^* , что $\mu^* + i v^*$ аналитическая функция $\mu + i v$. Если решение системы (1.5) — (1.6) найдено, то

возвращение на физическую плоскость x, y дается интегралами

$$\begin{aligned} x &= - \int \frac{\cos \theta}{\Phi(w)} dH + \frac{\sin \theta}{w} d\psi; \\ y &= - \int \frac{\sin \theta}{\Phi(w)} dH - \frac{\cos \theta}{w} d\psi, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где H, ψ, w и θ выражены в функции от μ и ν . С. А. Христианович показал, как, используя каноническую систему (1.5) — (1.6), можно рассчитывать нелинейные фильтрационные течения в областях, ограниченных прямолинейными непроницаемыми границами и линиями равного напора. В плоскости μ, ν берется область, совпадающая с рассматриваемой областью в физической плоскости x, y , и в ней решается задача линейной фильтрации с соответствующими граничными условиями. Логарифм комплексной скорости этого фиктивного линейного течения берется затем за $s + i\theta$; тем самым уравнения (1.5), являющиеся уравнениями Коши — Римана, удовлетворяются тождественно, а уравнения (1.6) превращаются в линейные уравнения с переменными коэффициентами для ψ и H .

В результате отыскание ψ и H сводится к отысканию некоторого фиктивного фильтрационного потока в среде с переменной «проницаемостью» L^{-1} .

Если взять в качестве новых переменных μ^* и ν^* , упомянутых выше, θ и s , система (1.6) примет вид

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = -L \frac{\partial \psi}{\partial s}, \quad \frac{\partial H}{\partial s} = L \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (1.9)$$

или, если вернуться к переменным (θ, w) ,

$$\frac{\Phi^2(w)}{w\Phi'(w)} \frac{\partial \psi}{\partial w} = - \frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad \frac{\Phi(w)}{w^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial H}{\partial w}. \quad (1.10)$$

Система (1.10) может быть непосредственно получена из системы (1.3), если воспользоваться указанным С. А. Чаплыгиным [219] преобразованием к переменным годографа скорости w, θ . Таким образом, система (1.9) или (1.10) есть частный случай системы (1.5) — (1.6). Этот случай обладает тем преимуществом, что для него переменные коэффициенты зависят лишь от одной независимой переменной w , однако его недостаток состоит в том, что в ряде случаев образом области течения является неоднолистная поверхность в переменных годографа w, θ .

Ниже (гл. VI) этот случай будет рассмотрен более подробно; пока же ограничимся теми задачами, в которых в силу определенной симметрии течения удастся получить отображение элемента физической плоскости на однолистную и достаточно простую область в плоскости годографа w, θ . По-видимому, впервые на удобство применения преобразования годографа к задачам теории фильтрации указал Энгелунд [239], подробно рассмотревший за-

дачи, связанные с двучленным законом фильтрации $\Phi(w) = w + \beta w^2$. Однако этот случай имеет весьма ограниченную область приложения, и главные результаты в нем могут быть получены на основе линеаризованных постановок. Возможно, поэтому метод, примененный Энгелундом, не привлек того внимания, которого он заслуживает. С другой стороны, это может быть связано и с тем, что, по существу, преобразование годографа очевидным образом подсказывается всем изложением работы [218]. Особенно удобным оказывается преобразование годографа в задачах фильтрации с предельным градиентом [66] ($\Phi(w) \rightarrow \lambda \neq 0$ при $w \rightarrow 0$). В этом случае область течения не совпадает, вообще говоря, со всей областью, где ищется решение; часть области оказывается покрытой застойными зонами, т. е. областями, где скорость равна нулю. Границы между областью течения и застойными зонами оказываются неизвестными линиями. Однако известно, что на них скорость обращается в нуль. В результате образ этих линий в плоскости годографа скорости известен — это отрезок оси $w = 0$.

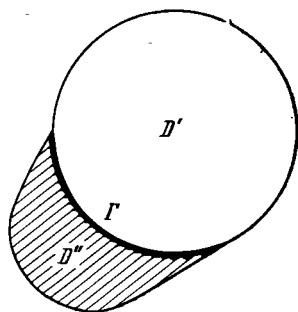


Рис. 3.1

Прежде чем перейти к примерам, несколько уточним сказанное. Именно, если $\Phi(+0) = \lambda > 0$, мы будем говорить о фильтрации с предельным градиентом; под областью течения будем понимать ту часть (совокупность тех внутренних точек) D' области D переменных x, y , в которой ищется решение, где $w > 0$; под застойными зонами D'' — область $w = 0$; под границей застойной зоны — общую часть границ областей D' и D'' (рис. 3.1). Будем искать решение задачи, непрерывное вместе со своими первыми производными вплоть до границы застойной зоны. При этом получаем, что на границе застойной зоны вектор градиента напора H направлен вдоль границы и равен по модулю λ ; внутри застойной зоны $|\text{grad } H| \leq \lambda$. Отсюда следуют три важных для последующего изложения выводы:

1. Поскольку нулевой скорости на границе области движения отвечает ненулевой вектор $\text{grad } H$, естественно приписать нулевой скорости в данной точке направление вектора $\text{grad } H$. Это означает, что в плоскости годографа скорости $w\theta$ имеет смысл различать точки с $w = 0$, отвечающие различным θ . Поэтому в дальнейшем w и θ рассматриваются не как полярные координаты, как это принято, скажем, в газовой динамике, а как прямоугольные.

2. Из условия $|\text{grad } H| = \lambda$ следует, что граница застойной зоны разбивается на дуги, вдоль каждой из которых произведение $\kappa \text{ grad } H$ сохраняет постоянное значение. (Здесь κ — единичный вектор касательной в направлении положительного обхода за-

стойной зоны.) Каждая из этих дуг выпукла внутрь застойной зоны, поскольку в противном случае найдется точка внутри застойной зоны, в которой $|\text{grad } H| > \lambda$: если отрезок AB , стягивающий дугу AmB границы, лежит внутри застойной зоны, то

$$\max_{AB} |\text{grad } H| \geq \lambda \cdot AmB/AB > \lambda.$$

3. Указанные в предыдущем пункте дуги отделены от дуг с противоположным направлением обхода точками возврата. Это утверждение следует из непрерывности вектора $\text{grad } H$ в точке смены направления обхода.

С физической точки зрения очевидно, что застойные зоны образуются примерно там, где в отсутствие предельного градиента образовались бы критические точки потока; при этом изолированные критические точки, не «разросшиеся» в целую застойную зону, возникнуть не могут. Действительно, в критической точке $|\text{grad } H| = 0$ и, по непрерывности, найдется некоторая область, содержащая эту точку, в которой $|\text{grad } H| \leq \lambda$, т. е. область, в которой $w = 0$.

§ 2. Задачи, допускающие отображение на плоскость годографа

Проиллюстрируем сказанное несколькими примерами, допуская, что имеет место движение с предельным градиентом $\Phi(+0) = \lambda > 0$.

1. Возможность эффективного решения плоской задачи нелинейной фильтрации при помощи преобразования годографа связана с существованием взаимно-однозначного отображения плоскости течения x, y на достаточно простую область плоскости годографа w, θ . Рассмотрим несколько простых задач, для которых это выполнено. Пусть в плоскости x, y имеется два точечных источника с интенсивностями (дебитом на единицу мощности) q на расстоянии $2L$ один от другого. Тогда течение будет симметрично относительно осей x и y (рис. 3.2), и в начале координат

$$w = 0, \quad |\text{grad } H| = 0. \quad (2.1)$$

Из (2.1) следует, что начало координат окружено застойной зоной. На осях координат, являющихся в силу симметрии линиями тока, граница застойной зоны имеет точки возврата (фиг. 3.2, а).

Картину течения (фиг. 3.2, а) легко отобразить на плоскость годографа (фиг. 3.2, б). Второй квадрант плоскости течения на плоскости w, θ переходит в полубесконечную полосу с разрезом $ABCGDEA$. Длина разреза $CG = a$ равна максимальному значению на оси y скорости фильтрации, достигаемому в некоторой точке G . Заранее нельзя исключить случай, когда застойная зона захватывает всю ось y ; тогда на рис. 3.2, б точка C уходит в бесконечность, а точка G сливается с C и D .

Для определения ψ нужно решить уравнение (1.1) в области $ABCGDE$ при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned}\psi &= 0 \text{ на } ABCGD, \quad \psi = q/2 \text{ на } EA, \\ \psi &= q \left(1 - \frac{2(\pi - \theta)}{\pi} \right) / 2 \text{ на } DE.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Последнее условие следует из того обстоятельства, что на бесконечности картина течения асимптотически совпадает с полем одиночного точечного источника интенсивности $2q$. Это требование, тривиальное в задачах линейной фильтрации, оказывается необходимым дополнительным требованием при фильтрации с предельным градиентом; в противном случае решение задачи оказывается неединственным.

2. Предположим, что в предыдущем примере один из источников заменен на сток той же интенсивности. Тогда должна образоваться внешняя застойная зона (рис. 3.3а).

Действительно, если предположить, что внешней застойной зоны нет, то возможно появление линий тока сколь угодно большой длины. В силу закона фильтрации перепад напора H между любыми двумя точками линии тока не меньше, чем l , где l — длина дуги линии тока. В то же время, поскольку источник и сток можно окружить двумя замкнутыми «эквипотенциалами», то перепад напора для всех линий тока между этими эквипотенциалами конечен. Ввиду того, что течение симметрично относительно оси x и антисимметрично относительно оси y , снова часть области движения, лежащая в первом квадранте, отображается на полуполосу в плоскости годографа w, θ (фиг. 3.3, б). При этом $\psi = 0$ на ABC , $\psi = q/2$ на DA , $H = \text{const}$ на CD .

С учетом второго уравнения (1.4) отсюда получаем

$$\psi = 0 \text{ на } ABC, \quad \psi = q/2 \text{ на } DA, \quad \partial\psi/\partial\theta = 0 \text{ на } CD. \quad (2.3)$$

Длина отрезка $CD = a$ на плоскости w, θ также подлежит определению.

Приведенные два примера типичны как в отношении качественной картины течения в физической плоскости, так и в отношении задачи, возникающей в плоскости w, θ . Существует значительное число симметричных конфигураций источников и стоков, для которых также легко построить образ на плоскости w, θ . Например, для бесконечного ряда источников (рис. 3.4, а) основной элемент плоскости течения $ABCDE$ отображается на полубесконечную полосу (рис. 3.4, б). Причем в этом случае задача для функции тока получается проще, так как не является смешанной: $\psi = 0$ на границе $ABCD$ и $\psi = q/4$ на EA . Аналогичным образом легко построить отображение для двух параллельных рядов источников или источников и стоков, а также для круговых батарей источников и встречающегося в нефтепромысловой практике чередующегося расположения источников и стоков в виде двоякопериодической

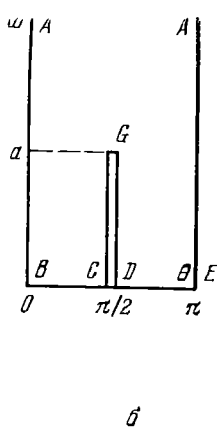
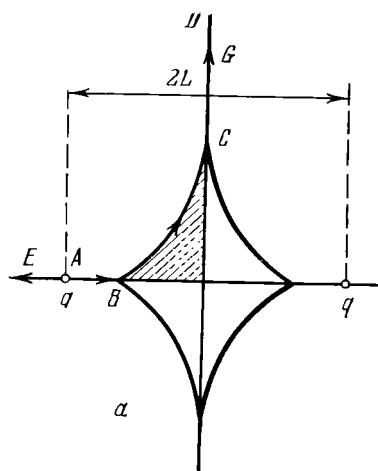


Рис. 3.2

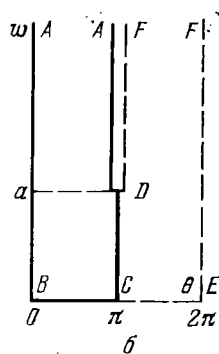
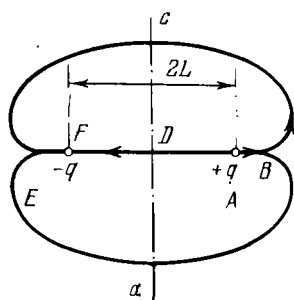


Рис. 3.3

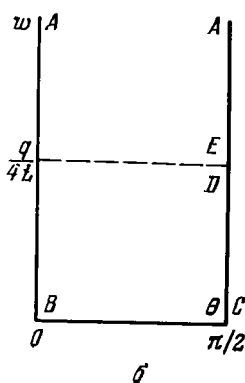
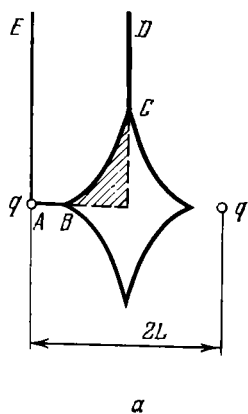


Рис. 3.4

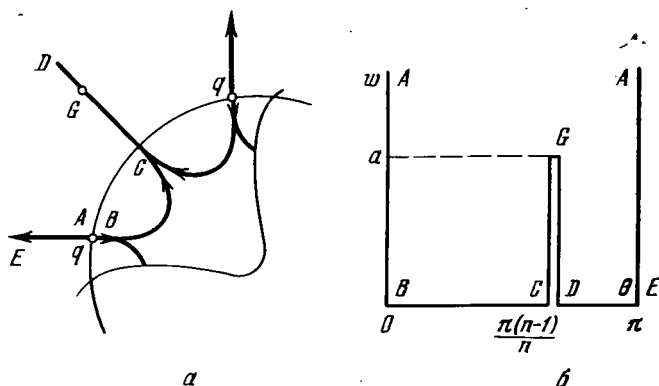


Рис. 3.5

решетки (так называемые пяти-, семи- и девятиточечные системы расстановки скважин). Приведем для примера отображения для круговой батареи n источников (рис. 3.5) и для элемента пятиточечной схемы (рис. 3.6). В обоих этих случаях положение конца разреза a должно быть определено дополнительно.

§ 3. О некоторых эквивалентных формулировках

1. Преобразование Чаплыгина — не единственный способ сведения нелинейной системы уравнений (1.3) к линейной системе. Известно, что того же можно добиться при помощи преобразования Лежандра (см., например, [109]). Такой прием был применен в теории прямолинейных движений вязко-пластических жидкостей [151, 264] и при рассмотрении продольного сдвига упруго-пластического тела [268]. В некоторых случаях это позволяет получить более простую задачу, чем при непосредственном применении преобразования С. А. Чаплыгина.

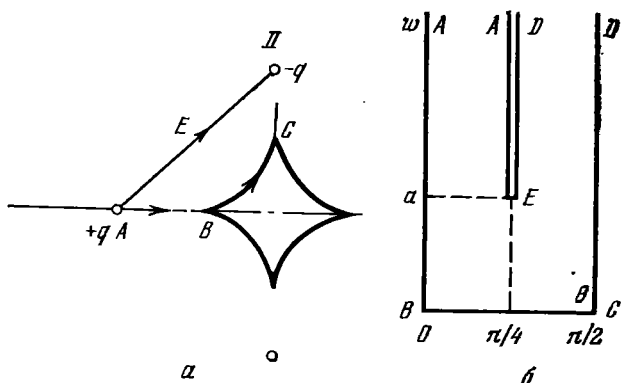


Рис. 3.6

Положим

$$\xi = \psi - x \psi_x - y \psi_y = \psi + wY; \quad (3.1)$$

$$\eta = H - xH_x - yH_y = H + \Phi(w)X, \quad (3.2)$$

где

$$X = x \cos \theta + y \sin \theta; \quad Y = x \sin \theta - y \cos \theta \quad (3.3)$$

— проекции радиуса-вектора на направление вектора скорости и перпендикулярное ему. При этом имеют место соотношения

$$X = [\Phi'(w)]^{-1} \eta_w; \quad H = \eta - \Phi(w) \eta_w / \Phi'(w); \quad (3.4)$$

$$Y = \xi_w, \quad \psi = \xi - w \xi_w; \quad (3.5)$$

$$x = \frac{\cos \theta}{\Phi'(w)} \eta_w + \sin \theta \xi_w; \quad y = \frac{\sin \theta}{\Phi'(w)} \eta_w - \cos \theta \xi_w, \quad (3.6)$$

позволяющие вернуться к исходным переменным.

Имеем, далее, используя (3.4) — (3.5) и (1.3)

$$\xi_\theta = \frac{w}{\Phi'(w)} \eta_w = wX; \quad \eta_\theta = -\Phi(w)Y - \Phi(w)\xi_w. \quad (3.7)$$

Таким образом, сопряженные ψ и H функции ξ и η удовлетворяют системе, аналогичной системе (1.10)

$$\frac{\partial \xi}{\partial \theta} = \frac{w}{\Phi'(w)} \frac{\partial \eta}{\partial w}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = -\Phi(w) \frac{\partial \xi}{\partial w}. \quad (3.8)$$

Ниже будут приведены примеры, в которых решение задачи заметно упрощается благодаря использованию переменных ξ и η .

2. Допустим, что $\Phi(w) = 0$, $\Phi'(w) > 0$. В таком случае обратная к Φ функция Ω может, вообще говоря, изображать некоторый допустимый закон фильтрации. Введем векторы w^* и h^* , равные по абсолютной величине $h = \text{grad } H$ и w соответственно, но повернутые относительно их на угол $\pi/2$. Имеем

$$dw w^* = 0, \quad h^* = -\text{grad } \psi = \text{grad } H^*, \quad (3.9)$$

причем $h^* = \Omega(w^*)$. Соотношения (3.9) определяют некоторый фильтрационный поток с функцией тока $\psi^* = H$ и напором $H^* = -\psi$, где H и ψ — напор и функция тока исходного фильтрационного потока. Два потока, определенные указанным выше образом, будем называть сопряженными. Линии тока одного из них являются линиями равного напора другого, и наоборот. Очевидно, понятие сопряженного потока является естественным обобщением понятия сопряжения комплексного потенциала для течений, удовлетворяющих закону Дарси. Для фиктивного потока система (1.10) дает

$$\frac{\Omega^2(w^*)}{w^* \Omega'(w^*)} \frac{\partial \psi^*}{\partial w^*} = -\frac{\partial H^*}{\partial \theta}; \quad \frac{\Omega(w^*)}{w^{*2}} \frac{\partial \psi^*}{\partial \theta} = \frac{\partial H^*}{\partial w^*} \quad (3.10)$$

или, если учесть, что $w^* = h$, $H^* = -\psi$, $\psi^* = H$,

$$\frac{\Omega^2(h)}{h\Omega'(h)} \frac{\partial H}{\partial h} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \frac{\Omega(h)}{h^2} \frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial w}. \quad (3.11)$$

Естественно, систему (3.11) можно было бы получить непосредственно из (1.10), выполнив в плоскости годографа преобразования $h = \Phi(w)$, $w = \Omega(h)$.

3. Ч а с т н ы е с л у ч а и. В дальнейшем в основном рассматривается фильтрация с предельным градиентом, однако многие результаты могут быть использованы и при других часто встречающихся нелинейных законах фильтрации. Поэтому ниже приводится сводка отвечающих им уравнений.

а). Степенной закон фильтрации

$$\Phi(w) = w^s, \quad \Omega(h) = h^{1/s}, \quad (3.12)$$

Имеем из (1.10)

$$\frac{w^s}{s} \frac{\partial \psi}{\partial w} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}; \quad w^{s-2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial H}{\partial w} \quad (3.13)$$

или

$$w^2 \psi_{ww} + s w \psi_w + s \psi_{\theta\theta} = 0; \quad w^2 H_{ww} + (2-s) w H_w + H_{\theta\theta} = 0. \quad (3.14)$$

Очевидно, уравнения, следующие из (3.11), принципиально не отличаются от (3.14); наконец, для сопряженных по Лежандру переменных ξ и η из (3.8) имеем

$$\frac{\partial}{\partial w} \frac{w}{\Phi'(w)} \frac{\partial \eta}{\partial w} + \frac{1}{\Phi(w)} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} = 0; \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial w} \Phi(w) \frac{\partial \xi}{\partial w} + \frac{\Phi'(w)}{w} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} = 0$$

или после подстановки (3.12)

$$w^2 \eta_{ww} + (2-s) w \eta_w + s \eta_{\theta\theta} = 0; \quad (3.16)$$

$$w^2 \xi_{ww} + s w \xi_w + s \xi_{\theta\theta} = 0.$$

б). Движение с предельным градиентом. Имеем уравнения

$$w(w+\lambda) \psi_{ww} + (w-\lambda) \psi_w + \psi_{\theta\theta} = 0; \quad (3.17)$$

$$w(w+\lambda) H_{ww} + (w+2\lambda) H_w + H_{\theta\theta} = 0;$$

$$w(w+\lambda) \xi_{ww} + w \xi_w + \xi_{\theta\theta} = 0; \quad (3.18)$$

$$w(w+\lambda) \eta_{ww} + (w+\lambda) \eta_w + \eta_{\theta\theta} = 0.$$

в). Двучленный закон фильтрации

$$\Phi(w) = w + \beta w^2; \quad (3.19)$$

$$w^2(1 + \beta w)^2 (1 + 2\beta w) \psi_{www} + (1 + 2\beta w + 3\beta^2 w^2) \times \\ \times w \psi_w + (1 + \beta w)(1 + 2\beta w)^2 \psi_{00} = 0; \quad (3.20)$$

$$w^2(1 + \beta w) H_{ww} + w H_w + (1 + 2\beta w) H_{00} = 0;$$

$$w^2(1 + 2\beta w) (1 + \beta w) \eta_{www} + w (1 + \beta w) \eta_w + \eta_{00} = 0;$$

$$w^2(1 + \beta w) \xi_{ww} + w (1 + 2\beta w) \xi_w + (1 + 2\beta w) \xi_{00} = 0. \quad (3.21)$$

Наконец, часто встречаются комбинированные аппроксимации закона фильтрации, для которых аналитическое выражение является различным на различных участках; чаще всего для аппроксимации используются приведенные выше зависимости; тогда уравнения в плоскости годографа получаются различными в различных «слоях» (скажем, от 0 до $w = a$ и от $w = a$ до ∞).

В. В. Соколовский [196] указал закон фильтрации

$$\Phi(w) = w [1 - w^2/m^2]^{-1/2}, \quad (3.22)$$

обладающий той особенностью, что для него «потенциал» оказывается аналитической функцией от

$$\zeta = -\ln [2w/(1 + \sqrt{1 - w^2/m^2})] + i\theta, \quad (3.23)$$

что позволяет применить к решению задач нелинейной фильтрации обычную технику теории функций комплексного переменного. Сказанное справедливо и для закона фильтрации, получаемого заменой в (3.22) и (3.23) знаков «минус» на «плюс» [227]. Соответствующее выражение для закона фильтрации можно рассматривать как частный случай более общего выражения

$$\Phi(w) = (w^{2n} + \lambda^{2n})^{1/2}. \quad (3.24)$$

Для закона фильтрации, выраженного соотношением (3.24), удобно записывать уравнения в плоскости годографа, введя вспомогательные переменные σ , φ ,

$$\Phi = \lambda \operatorname{ch}^n \sigma; \quad w = \lambda \operatorname{sh}^n \sigma; \quad \varphi = \theta/n. \quad (3.25)$$

При этом имеем уравнения

$$\begin{aligned} \psi_{\sigma\sigma} - (n+1) \operatorname{sh}^{-2} \sigma \psi_{\sigma} + \psi_{\varphi\varphi} &= 0; \\ H_{\sigma\sigma} + 2(n+1) \operatorname{sh}^{-4} \sigma H_{\sigma} + H_{\varphi\varphi} &= 0; \\ \partial (\operatorname{cth}^{n-1} \sigma \xi_{\sigma}) / \partial \sigma + \operatorname{cth}^{n-1} \sigma \xi_{\varphi\varphi} &= 0; \\ \partial (\operatorname{th}^{n-1} \sigma \eta_{\sigma}) / \partial \sigma + \operatorname{th}^{n-1} \sigma \eta_{\varphi\varphi} &= 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Нетрудно видеть, что при $n = -1$ уравнения для ψ и H превращаются в уравнения Лапласа; при $n = 1$ получаем уравне-

ние Лапласа для сопряженных по Лежандру неизвестных ξ и η . Таким образом, этот случай также сводится к теории аналитических функций [164, 165]. Найденный С. В. Панько случай

$$\Phi(w) = (w^2 + \lambda^2)^{1/2} \quad (3.27)$$

интересен в том отношении, что представляет собой тот вариант закона фильтрации с предельным градиентом, для которого решения строятся элементарно, однако соотношение (3.27) плохо аппроксимирует реальные выпуклые $[\Phi''(w) < 0]$ законы фильтрации псевдопластических жидкостей.

§ 4. Элементарные решения плоских задач нелинейной фильтрации

Исследование нелинейных задач естественно начать так же, как и в линейной теории [172], с анализа поведения решения вблизи особых точек границы области движения (угловые точки, точки смены граничных условий и т. д.), вблизи источников и на бесконечности. Так же, как и в аналогичных задачах газовой динамики [192, 269] и нелинейной теории упругости [154, 260], для отыскания соответствующих особых решений удобно перейти на плоскость годографа.

1. Система (1.10) допускает ряд решений вида

$$\psi = P(w) T(\theta); \quad H = F(w) S(\theta). \quad (4.1)$$

Такие решения мы будем называть элементарными и в этом параграфе проведем их анализ и дадим им соответствующую интерпретацию. Подставляя (4.1) в (1.10), найдем

$$\frac{w^2}{\Phi P} \frac{d}{dw} \left(\frac{\Phi^2}{w \Phi'} \frac{dP}{dw} \right) = \frac{T''}{T} = -r^2 = \text{const.} \quad (4.2)$$

Пусть прежде всего $r = 0$. Тогда

$$T(\theta) = A\theta + B; \quad P = C \int \frac{w \Phi'(w)}{\Phi^2(w)} dw + D, \quad (4.3)$$

причем в силу инвариантности уравнений (1.10) по отношению к сдвигу по θ (повороту осей координат в физической плоскости) при $A \neq 0$ можно считать $B = 0$. Если $A = 0$, то $T(\theta) = B = \text{const}$, функция тока не зависит от угла θ , но зависит от скорости. Чтобы рассмотреть соответствующую картину на физической плоскости, воспользуемся соотношениями (1.8), считая в них ψ и H функциями w и θ и выражая производные H_θ и H_w через ψ_θ и ψ_w , получим

$$dx = - \left[\frac{\cos \theta}{w^2} \psi_\theta + \frac{\sin \theta}{w} \psi_w \right] dw + \\ + \left[\frac{\cos \theta}{w} \frac{\Phi(w)}{\Phi'(w)} \psi_w - \frac{\sin \theta}{w} \psi_\theta \right] d\theta, \quad (4.4)$$

$$dy = - \left[\frac{\sin \theta}{w^2} \psi_0 - \frac{\cos \theta}{w} \psi_w \right] dw + \\ + \left[\frac{\sin \theta}{w} \frac{\Phi(w)}{\Phi'(w)} \psi_w + \frac{\cos \theta}{w} \psi_0 \right] d\theta.$$

В данном случае $\psi_0 = 0$. Образом линии $\theta = \theta_0 = \text{const}$ в физической плоскости будет линия

$$dx = - \frac{\sin \theta_0}{w} \psi_w dw, \quad dy = \frac{\cos \theta_0}{w} \psi_w dw$$

или с учетом (4.1), (4.3)

$$dx = - \sin \theta_0 \frac{AC\Phi'(w)}{\Phi^2(w)} dw; \quad dy = \cos \theta_0 \frac{AC\Phi'(w)}{\Phi^2(w)} dw \quad (4.5)$$

или

$$x = - \frac{AC \sin \theta_0}{\Phi(w)} + x_\infty; \quad y = \frac{AC \cos \theta_0}{\Phi(w)} + y_\infty. \quad (4.6)$$

Здесь x_∞, y_∞ — координаты точки, отвечающей $w = \infty$. (Мы предполагаем, что $\Phi(\infty) = \infty$.) Таким образом, линии $\theta = \theta_0 = \text{const}$ — отрезки прямых, проходящих через точку $M(x_\infty, y_\infty)$ и перпендикулярных направлению скорости, задаваемому углом θ_0 .

Линии $w = \text{const}$, совпадающие с линиями тока, как ясно из (4.6), — дуги окружностей радиуса $1/\Phi(w)$ с центром в M . Нетрудно понять, что построенное течение отвечает точечному вихрю в точке M . Далее, если имеет место течение с предельным градиентом ($\Phi(0) = \lambda > 0$), то область течения ($0 < w < \infty$) есть круг (или сектор круга) конечного радиуса AC/λ , вне круга $w \equiv 0$ (движение отсутствует), при $\Phi(0) = 0$ движение охватывает всю плоскость (соответственно сектор плоскости). Наконец, из (1.10) находим

$$H = S(\theta) = - AC \cdot \theta. \quad (4.7)$$

Таким образом, прямые $\theta = \text{const}$ — линии постоянного напора, а «интенсивность» вихря характеризует скорость изменения напора с изменением угла. Тем самым мы получили, что найденное течение при $0 \leq \theta \leq \alpha$ возникает между двумя линиями постоянного напора, образующими между собой угол α при разности напоров между ними $H_1 - H_2 = AC \cdot \alpha$. Отметим, что поле напора не зависит от вида закона фильтрации.

Аналогично устанавливается, что соотношения (4.3) при $A = q/2\pi \neq 0; B = C = 0; D \neq 0$ характеризуют осесимметричное течение от точечного источника интенсивности q ; линии тока, совпадающие с линиями $\theta = \text{const}$, — прямые, проходящие через источник; источнику отвечает $w = \infty$; линии $w = w_0 = \text{const}$, совпадающие с линиями равного напора, — окружности радиуса $q/2\pi w_0$; перепад напора между двумя такими окружностями ра-

вен, очевидно',

$$H_1 - H_2 = \int_{R_1}^{R_2} \Phi \left(\frac{q}{2\pi r} \right) dr, \quad (4.8)$$

меняется от 0 до ∞ при изменении w от ∞ до 0; причем поле скоростей не зависит от вида закона фильтрации; течение охватывает всю плоскость при произвольном законе фильтрации.

Указанные решения и их обобщения на кусочно-неоднородные среды рассматривались рядом автором [43, 149, 240, 241]. В частности, именно на течении типа вихря Георгице впервые установил наличие застойных зон при движении с предельным градиентом давления.

Рассмотрим теперь элементарное решение, отвечающее $r \neq 0$ и имеющее вид

$$\psi(w, \theta) = P(w) \sin r \theta, \quad (4.9)$$

где $P(w)$ — решение уравнения

$$\frac{d}{dw} \left(\frac{\Phi^2}{w\Phi'} \frac{dP}{dw} \right) - r^2 \frac{\Phi}{w^2} P = 0. \quad (4.10)$$

При достаточно общих условиях (достаточно, например, потребовать степенного роста $\Phi(w)$ при $w \rightarrow \infty$) можно выделить два таких линейно независимых решения уравнения (4.10), одно из которых ($P_2(w)$) неограниченно возрастает при $w \rightarrow \infty$, а другое ($P_1(w)$) стремится к нулю при $w \rightarrow \infty$.

В силу условий

$$\Phi(0) \geq 0, \quad \Phi'(w) \geq 0$$

решение $P_1(w)$ не меняет знака и монотонно (его можно считать положительным и монотонно убывающим). В результате существует (конечный или бесконечный) предел

$$0 < \lim_{w \rightarrow 0} P_1(w) = A_1 \leq \infty.$$

В качестве $P_2(w)$ возьмем решение, обращающееся в нуль при $w = 0$

$$P_2(w) = P_1(w) \int_0^w \frac{u\Phi'(u) du}{\Phi^2(u) P_1^2(u)}. \quad (4.11)$$

Решение $P_2(w)$ монотонно возрастает и при $w \rightarrow \infty$ $P_2(w) \rightarrow \infty$.

Рассмотрим физическую интерпретацию элементарного решения вида

$$\psi = P_2(w) \sin r \theta. \quad (4.12)$$

На линии $\theta = 0$ имеем из (4.4) и (4.12)

$$dx = -rw^{-2}P_2(w) dw; \quad dy = 0. \quad (4.13)$$

Из (4.13) следует, что картина течения, отвечающая решению (4.12), зависит от интегрируемости функции $w^{-2}P_2(w)$ при $w \rightarrow 0$ и $w \rightarrow \infty$. Покажем, что интеграл

$$I(A, a) = \int_a^A P_2(w) \frac{dw}{w^2} \quad (4.14)$$

сходится по крайней мере на одном пределе (т. е. существует конечный предел либо при $A \rightarrow \infty$, либо при $a \rightarrow 0$). Из (4.10) имеем

$$\begin{aligned} I(A, a) &= \frac{1}{r^2} \int_a^A \frac{1}{\Phi} \frac{d}{dw} \left(\frac{\Phi^2}{w\Phi'} \frac{dP}{dw} \right) dw = \\ &= \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{\Phi P'}{w\Phi'} + \frac{P}{w} \right)_a^A + I(A, a) \right] \end{aligned}$$

или

$$(r^2 - 1) I(A, a) = \left[\frac{\Phi P'}{w\Phi'} + \frac{P}{w} \right]_a^A. \quad (4.15)$$

Пусть $r \geq 1$. Тогда, поскольку $I(A, a) > 0$, левая часть либо ограничена, либо стремится к $+\infty$ при $a \rightarrow 0$. Однако правая часть при $a \rightarrow 0$ может либо остаться ограниченной, либо стремиться к $-\infty$, так как выражение в квадратных скобках положительно. Таким образом, при $r \geq 1$ $I(A, 0) < \infty$; одновременно получаем оценки (при $r \geq 1$)

$$\frac{P}{w} = 0(1); \quad \frac{\Phi P'}{w\Phi'} = 0(1) \quad (w \rightarrow 0).$$

Следовательно, при $r > 1$ предел $I(A, a)$ при $a \rightarrow 0$ существует при любом виде закона фильтрации.

Если $r \leq 1$, то левая часть выражения (4.15) неположительна (отрицательна при $r < 1$), поэтому, устремляя A к бесконечности, получим оценки

$$\frac{\Phi P'}{w\Phi'} = 0(1), \quad \frac{P}{w} = 0(1) \quad (w \rightarrow \infty),$$

причем при $r < 1$ имеется конечный предел $I(A, a)$ при $A \rightarrow \infty$.

Таким образом, интеграл $I(A, a)$ при $r \neq 1$ сходится по крайней мере на одном пределе. Простой пример линейного (или вообще степенного) закона фильтрации показывает, что в общем случае при $r \neq 1$ интеграл $I(A, a)$ сходится только на одном пределе, а при $r = 1$ расходится на обоих.

Если, однако, имеет место фильтрация с предельным градиентом $\Phi(+0) = \lambda > 0$, то интеграл $I(A, a)$ всегда имеет конечный

предел при $a \rightarrow 0$ (и, следовательно, при $r < 1$ интеграл $I(\infty, 0)$ конечен). Пусть $r \leq 1$ и пусть $I(A, +0) = \infty$. Тогда, с учетом конечности Φ , легко получить из (4.10), что

$$r^2 I(A, a) \sim (P' \Phi / w \Phi')_{w=a},$$

а из (4.15)

$$I(A, a) \sim C(P/w)_{w=a}.$$

Таким образом, имеем асимптотически

$$\frac{P' \Phi}{w \Phi'} \sim C r^2 \frac{P}{w} \quad \text{или} \quad \frac{P'}{P} \sim r^2 \frac{\Phi'}{\Phi}.$$

Отсюда $P \Phi = \text{const}$ в противоречие с условием $P(0) = 0$.

При $r = 1$ из тождества (4.15) получаем первый интеграл уравнения (4.10) в виде

$$\frac{\Phi P'}{w \Phi'} + \frac{P}{w} = C,$$

откуда общее решение

$$P = \frac{C}{\Phi} \int_0^w w \Phi' dw + \frac{D}{\Phi} \quad (4.16)$$

(C и D — постоянные).

Решению $P_2(w)$ отвечает $D = 0$, решению $P_1(w)$ соответствует $C = 0$. При $\Phi(+0) = \lambda > 0$ решение $P_1(w)$ имеет конечный предел при $w \rightarrow 0$; для P_2 имеем

$$P_2 = \frac{1}{\Phi} \int_0^w w \Phi' dw. \quad (4.17)$$

Если допустить, что $\Phi'(w)$ имеет при $w \rightarrow 0$ не более чем степенную особенность, то $P_2 = 0$ ($w^{1+\epsilon}$), $\epsilon > 0$ и интеграл $I(A, a)$ сходится на нижнем пределе.

Наконец, для убывающего на бесконечности решения $P_1(w)$, очевидно, интеграл $I(A, a) = \int_a^A \frac{P_1(w)}{w^3} dw$ сходится при $A \rightarrow \infty$ и расходится при $a \rightarrow 0$ при любом r .

Вернемся теперь к анализу решения (4.12).

Пусть $r < 1$. Примем за начало координат в физической плоскости точку, отвечающую $w = \infty$, $\theta = 0$. Для точек линии $\theta = 0$ имеем

$$0 \leq x = r \int_w^\infty \frac{P_2(w) dw}{w^2} \leq r \int_0^\infty \frac{P_2(w) dw}{w^2}; \quad y = 0. \quad (4.18)$$

Таким образом, линия $\theta = 0$ — луч или, если $I(\infty, 0) < \infty$ — конечный отрезок, что, как было показано выше, имеет место для движения с предельным градиентом.

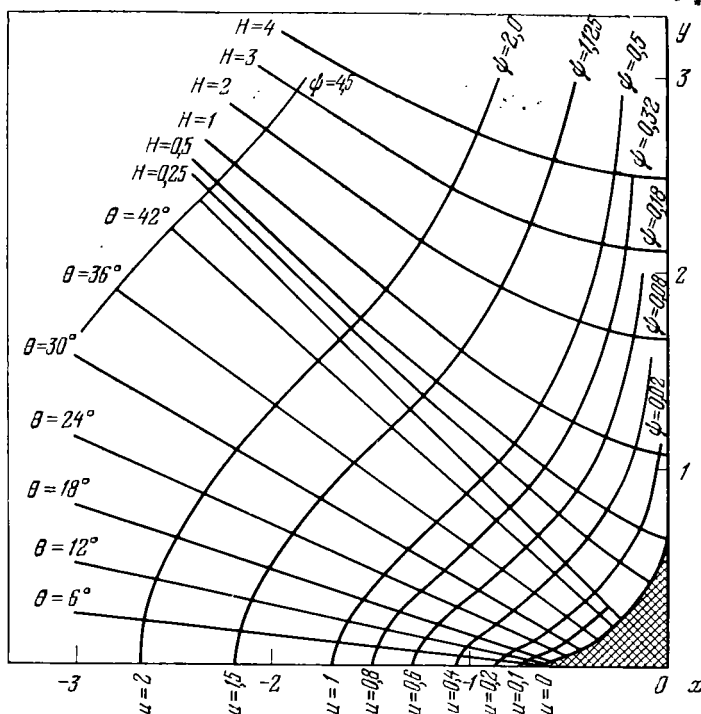
Рассмотрим теперь образ линии $w = \text{const}$, $0 < \theta < \theta_0 = \pi/2$. Имеем вдоль нее

$$\begin{aligned} dx &= \left[-\frac{r \sin \theta \cos r\theta}{w} P_2(w) + \frac{\cos \theta \sin r\theta}{w} \frac{\Phi(w)}{\Phi'(w)} P_2'(w) \right] d\theta, \\ dy &= \left[\frac{r \cos \theta \cos r\theta}{w} P_2(w) + \frac{\sin \theta \sin r\theta}{w} \frac{\Phi(w)}{\Phi'(w)} P_2'(w) \right] d\theta. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Из сходимости интегралов (4.18) на верхнем пределе следует, что правая часть выражений (4.19) стремится к нулю при $w \rightarrow \infty$. Таким образом, «отрезок» $0 \leq \theta \leq \theta_0$, $w = \infty$ плоскости годографа отображается в точку $x = y = 0$; линия $\theta = \theta_0$, как легко видеть, отображается в отрезок (или полупрямую)

$$x = -t \cos \theta_0; \quad y = t \sin \theta_0; \quad 0 \leq t \leq r \int_0^\infty P_2(w) \frac{dw}{w^2}. \quad (4.20)$$

Поведение линий $w = \text{const}$ при $w \rightarrow 0$ вновь определяется сходимостью интеграла $I(A, a)$ при $a \rightarrow 0$. Если $I(A, a) < \infty$, то, оче-



видно, $P_2(w)/w \rightarrow 0$ при $w \rightarrow 0$ и существует конечный предел

$$\chi = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\Phi(w) P'(w)}{w \Phi'(w)}.$$

Таким образом, существует предельная линия, отвечающая $w = 0$ и определяемая уравнениями

$$dx = \chi \cos \theta \sin r \theta d\theta; \quad dy = \chi \sin \theta \sin r \theta d\theta. \quad (4.21)$$

На предельной линии $\psi = 0$, так как $P_2(0) = 0$.

Если же $\Phi(0) = 0$, то при $w \rightarrow 0$ величины $P_2(w)/w$ и $\Phi(w) P_2'(w)/w \Phi'(w)$ неограниченно возрастают и предельной линии нет. Таким образом рассмотренный случай отвечает течению в «петле», образованной линией тока $\psi = 0$. В двойной точке этой линии (начало координат) функция тока имеет особенность. Описанная картина отвечает течению, создаваемому «обобщенным диполем», заключенным внутри угла раствором $\theta_0 - \pi$.

Если $r > 1$ ($\theta_0 < \pi$), то интеграл $I(A, a)$ расходится на верхнем пределе, но сходится на нижнем. Принимая за начало координат точку, в которой $\theta = 0$, $w = 0$, и повторяя проведенные выше рассуждения, убедимся, что решение (4.12) при $r > 1$ отвечает течению между двумя полупрямыми, расположенными под углом $\pi - \theta_0$ («внутреннее обтекание угла»), причем при $\Phi(0) = 0$ течение существует вплоть до вершины угла, а при $\Phi(0) = \lambda > 0$ вблизи вершины образуется застойная зона и течение ограничено предельной линией $w = 0$, сопрягающей стороны угла, как в примере рис. 3.7.

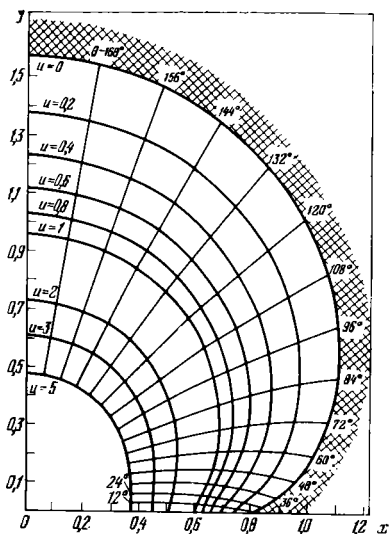


Рис. 3.8

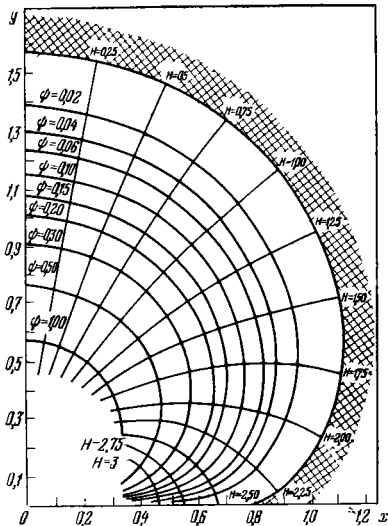


Рис. 3.9

Если за основное решение взято убывающее при $w \rightarrow \infty$ решение $P_1(w)$ и $r > 1$ ($\theta_0 < \pi$), то, как нетрудно убедиться, функция $\psi = P_1(w) \sin r \theta$, $r = \theta_0/\pi$ определяет внешнее обтекание угла раствором $\pi - \theta_0$. При этом застойная зона не образуется при любом значении $\Phi(0)$.

Если $P_1(w) \rightarrow \infty$ при $w \rightarrow 0$, то суммарный расход потока бесконечен; если же $P_1(0) < \infty$, то суммарный расход конечен, что является специфической особенностью задач внешнего обтекания с предельным градиентом.

Если $r \rightarrow 1$, стороны угла смыкаются и задача переходит в задачу об обтекании пластины. Наконец, при $r < 1$ стороны угла «меняются местами», и картина течения в физической плоскости становится неоднolistной. Тем не менее ей можно придать определенный физический смысл при $1/2 < r < 1$ ($\pi < \theta_0 < 2\pi$). Заметим для этого, что линия $\theta = 1/2 \theta_0$ представляется на физической плоскости прямой, расположенной под углом $1/2 (\pi + \theta_0)$ к прямой, отвечающей $\theta = 0$, причем при $\theta = 1/2 \theta_0$ напор H сохраняет постоянное значение. Таким образом, внешнее обтекание угла $\pi - \theta_0$ можно рассматривать так же, как течение в угле раствором $(\pi + \theta_0)/2$, если одна из сторон непроницаема, а на другой поддерживается постоянный напор. При такой интерпретации можно рассматривать значения $\theta_0 < 2\pi$.

Мы ограничимся здесь лишь двумя примерами, относящимися к фильтрации с предельным градиентом.

На рис. 3.7 показаны линии $u = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, характеризующие поле скоростей, и сетка течения (линии $\psi = \text{const}$, $H = \text{const}$) для внутреннего течения в угле раствором $1/2 \pi$ ($\lambda = 1$, $Q = -2$), на рис. 3.8 и 3.9 приведены те же семейства линий для течения, создаваемого диполем, помещенным в начале координат ($r = 1/2$, $Q = -0,85$). Более подробно примеры элементарных решений рассмотрены в [10].

Глава IV

Построение точных решений в плоскости годографа

После преобразования к плоскости годографа скорости фильтрации задачи описанного выше вида сводятся к типичным краевым задачам для уравнения второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial w} \frac{\Phi^2(w)}{w\Phi'(w)} \frac{\partial \psi}{\partial w} + \frac{\Phi}{w^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (0.1)$$

в полуполосе $0 \leq w < \infty$, $0 \leq \theta \leq \theta_0$ с одним или несколькими «продольными» разрезами, т. е. разрезами вдоль линий $\theta = \text{const}$.

Основной спецификой рассматриваемых задач является то, что область, в которой ищется решение, составляется из элементарных полуполос $\theta_i \leq \theta \leq \theta_{i+1}$, $0 \leq w < \infty$, причем в силу вырождения уравнения (0.1) при $w = 0$ область изменения аргумента w в рассматриваемых задачах совпадает с естественной областью его изменения. Допустим, что отыскивается ограниченное при $w \rightarrow \infty$ решение уравнения (0.1). Рассмотрим вначале ограниченное при $w \rightarrow \infty$ элементарное решение уравнения (0.1) вида

$$P(w, s) \begin{Bmatrix} \text{sh } s\theta \\ \text{ch } s\theta \end{Bmatrix} \\ \frac{d}{dw} \left[\frac{\Phi^2}{w\Phi'} \frac{d}{dw} P(w, s) \right] + s^2 \frac{\Phi}{w^2} P(w, s) = 0. \quad (0.2)$$

Тогда общее решение уравнения (0.1) в элементарной полосе представляется при определенных условиях в виде

$$\psi(w, \theta) = \int R(s, \theta) P(w, s) ds; \quad (0.3)$$

$$R(s, \theta) = A(s) \text{sh } s\theta + B(s) \text{ch } s\theta,$$

где интеграл берется по спектру задачи для уравнения (0.2) с соответствующими краевыми условиями. Дальнейшее решение задачи сводится к отысканию функций $A(s)$ и $B(s)$ из условий сопряжения для функции $\psi(w, \theta)$ на границах элементарных полос. Чтобы сформулировать эти условия, необходимо знать выражение для $R(s, \theta)$ через $\psi(w, \theta)$, т. е. иметь общее решение интегрального

уравнения (0.3)

$$R(s, \theta) = \int_0^{\infty} K(w, s) \psi(w, \theta) dw. \quad (0.4)$$

Формулы (0.3) — (0.4) есть не что иное, как формулы разложения функций из определенного класса в интеграл по собственным функциям уравнения (0.2). Формула (0.4) определяет интегральное преобразование по переменной w ; формула (0.3) дает его обращение. Имея эти формулы, мы можем использовать для решения задач в плоскости годографа всю обычную технику интегральных преобразований. В частности, если преобразование (0.3) — (0.4) совпадает с одним из хорошо изученных интегральных преобразований, мы можем пользоваться всеми готовыми приемами построения решений, вплоть до использования таблиц преобразований. Именно так обстоит дело при степенном законе фильтрации ($\Phi(w) = w^2$), когда собственные функции — степени w , а интегральное преобразование есть преобразование Меллина (см. § 5). В других случаях может оказаться необходимым первоначально построить соответствующий аппарат. Естественно, это оправдано лишь при необходимости его применения к достаточно широкому кругу задач. Такой путь был выбран нами для анализа течений с предельным градиентом давления; этому анализу посвящены в основном главы IV—VI. Если же для некоторого конкретного закона фильтрации рассматривается лишь небольшое число «опорных» задач, то могут оказаться более удобными универсальные методы решения, более громоздкие, но не требующие подготовительной работы.

§ 1. Интегральное преобразование по переменной w при фильтрации с предельным градиентом

При фильтрации с предельным градиентом ($\Phi(w) = w + \lambda$) уравнение (0.1) принимает вид

$$w(w + \lambda) \psi_{ww} + (w - \lambda) \psi_w + \psi_{\theta\theta} = 0, \quad (1.1)$$

а уравнение (0.2) — вид

$$w(w + \lambda) Y''(w) + (w - \lambda) Y'(w) + s^2 Y(w) = 0. \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) есть частный случай гипергеометрического уравнения; для построения формул разложения функции $f(w)$, $0 \leq w < \infty$, по собственным функциям уравнения (1.2) можно использовать общий метод, изложенный в книге Титчмарша [201]. В этой книге (раздел 4.16) детально разобран случай разложения по собственным функциям гипергеометрического уравнения

$$x(x + 1) Y'' + \{\gamma + (\alpha + 1)x\} Y' + s^2 Y = 0 \quad (1.3)$$

($0 < x < \infty$), но лишь при $\gamma > 2$; уравнение же (1.2), если положить $u = w/\lambda$, совпадает с (1.3) при $\gamma = -1$, $\alpha = 0$. Тем не менее искомые результаты удается получить [67], почти буквально повторяя рассуждения Титчмарша; различие состоит лишь в том, что в качестве основного решения, по которому ведется разложение, выбирается решение

$$P_2(u) = u^2 F(2 + is, 2 - is, 3, -u)$$

(F — гипергеометрическая функция [21, 115, 247]). В дальнейшем мы будем пользоваться сокращенным обозначением

$$F(2 + is, 2 - is, 3, -u) \equiv F(s, -u). \quad (1.4)$$

В результате получим следующие основные формулы разложения:

$$g(u) = \frac{1}{2} u^2 \int_0^\infty \frac{s^3 (1 + s^2)}{\operatorname{th} \pi s} F(s, -u) g^*(s) ds, \quad (1.5)$$

$$g^*(s) = \int_0^\infty (1 + v) g(v) F(s, -v) dv. \quad (1.6)$$

Функцию $g^*(s)$ мы будем называть, как обычно, трансформантой $g(u)$, а формулу (1.5) — формулой обращения.

Согласно [201] взаимное соответствие (1.5) — (1.6) доказано для функций $g(u)$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^\infty \frac{1+u}{u^2} g^2(u) du < \infty. \quad (1.7)$$

В то же время при решении конкретных задач приходится рассматривать функции, не удовлетворяющие указанным требованиям. В частности, приходится рассматривать функции, не убывающие на бесконечности или не обращающиеся в нуль при $u = 0$. Чтобы обобщить пару преобразований (1.5) — (1.6) и на функции такого вида, можно воспользоваться общим приемом выхода в комплексную плоскость параметра преобразования $s = \sigma + i\tau$.

Однако прежде всего необходимо получить некоторые формулы для часто встречающихся в данной работе гипергеометрических функций. Выводу этих формул посвящен следующий параграф. Для удобства в этом параграфе изложен также ряд известных сведений о гипергеометрических функциях, часто используемых в тексте.

§ 2. Некоторые сведения об используемых гипергеометрических функциях

Рассмотрим гипергеометрическую функцию

$$F(s, -u) \equiv F(2 + is, 2 - is, 3, -u). \quad (2.1)$$

Эта функция представляет собой целую аналитическую функцию переменной s ; она четна по s в силу свойства симметрии гипергеометрических функций. Отсюда в соответствии с известной теоремой Пэли — Винера [35, 228] получаем, что косинус-преобразование Фурье от $F(s, -u)$ по s — финитная функция, т. е. должно иметь место представление

$$F(s, -u) = \int_0^{a(u)} f(\tau, u) \cos \tau s d\tau, \quad (2.2)$$

где верхний предел $a(u)$ конечен при каждом u . Наличие представления вида (2.2) будет играть существенную роль в последующем изложении; сейчас мы получим его в явном виде. Имеем

$$F(s, -u) = -\frac{2}{1+s^2} \frac{d}{du} F(1 + is, 1 - is, 2, -u). \quad (2.3)$$

Воспользуемся формулой аналитического продолжения гипергеометрических функций

$$\begin{aligned} F(1 + is, 1 - is, 2, -u) &= \frac{\Gamma(2) \Gamma(-2is)}{\Gamma^2(1 - is) u^{1+is}} \times \\ &\times F\left(1 + is, is, 1 + 2is, -\frac{1}{u}\right) + \\ &+ \frac{\Gamma(2) \Gamma(2is)}{\Gamma^2(1 + is) u^{1-is}} F\left(1 - is, -is, 1 - 2is, -\frac{1}{u}\right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

и заменим функции, входящие в правую часть соотношения (2.4), их интегральными представлениями Эйлера [21, 115].

Имеем

$$F\left(1 + is, is, 1 + 2is, -\frac{1}{u}\right) = \frac{\Gamma(1 + 2is)}{\Gamma(is) \Gamma(1 + is)} \int_0^1 \frac{t^{is-1} (1-t)^{is}}{(1+t/u)^{1+is}} dt. \quad (2.5)$$

Подставляя это выражение в (2.4), получим

$$F(1 + is, 1 - is, 2, -u) = 2\operatorname{Re} \left(\frac{\Gamma(-2is) \Gamma(1 + 2is)}{\Gamma^2(1 - is) \Gamma^2(is)} \frac{1}{is} \int_0^1 \frac{v^{is} dt}{t(t+u)} \right), \quad (2.6)$$

где $v = t(1-t)/(u+t)$.

Используя формулу $\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$, получим

$$\begin{aligned} F(1+is, 1-is, 2, -u) &= 2\operatorname{Re} \left(\frac{\sin^2(\pi is)}{-\sin(2\pi is) \pi is} \int_0^1 \frac{v^{is} dt}{t(t+u)} \right) = \\ &= -\frac{\operatorname{th} \pi s}{2\pi s} \left(\int_0^1 \frac{v^{is} dt}{t(t+u)} + \int_0^1 \frac{v^{-is} dt}{t(t+u)} \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Обозначим

$$R_1^\pm(s, u) = \int_0^1 \frac{v^{\mp is} dt}{t(u+t)}; \quad v = \frac{t(1-t)}{u+t}. \quad (2.8)$$

Очевидно, интеграл в (2.8) сходится при $\operatorname{Im} s \leq 0$ и представляет собой аналитическую функцию s .

Принимая за переменное интегрирования v , легко получить

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(v) \frac{dt}{t(u+t)} &= \int_0^{v_*} \frac{f(v)}{V(1-v)^2 - 4uv} \frac{t^+ + t^-}{t^+ t^-} dv = \\ &= \frac{1}{u} \int_0^{v_*} f(v) \frac{(1-v)}{v} \frac{dv}{V(1-v)^2 - 4uv}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь v_* — максимальное значение $v(t)$ при $0 \leq t \leq 1$, а t^+ и t^- — два значения t , отвечающие данному v ,

$$\begin{aligned} t^\pm &= \frac{1-v}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1-v)^2 - 4uv}; \\ v_* &= 1 + 2u - 2\sqrt{u(u+1)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Полагая затем

$$v = e^{-\eta}, \quad \eta = |\ln v| = -\ln v \quad (2.11)$$

и используя (2.9), можно привести выражение (2.8) к виду

$$R_1^-(u, s) = \frac{1}{u} \int_\beta^\infty e^{-i\eta s} \frac{\operatorname{sh} \frac{\eta}{2} d\eta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2}}}; \quad u = \operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} \quad (\operatorname{Im} s < 0). \quad (2.12)$$

При $\eta \rightarrow \infty$ дробь в подынтегральном выражении (2.12) стремится к единице. Добавляя и вычитая из нее единицу, получим

$$R_1^-(u, s) = \frac{1}{u} \left\{ \frac{e^{-is\beta}}{is} + \int_\beta^\infty e^{-i\eta s} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\eta}{2}}{\left(\operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} \right)^{1/2}} - 1 \right] d\eta \right\}. \quad (2.13)$$

Представление (2.13) дает аналитическое продолжение $R_1^-(u, s)$ на полуплоскость $\text{Im } s < 1$ с выколотой точкой $s = 0$, где $R_1^-(u, s)$ имеет полюс.

Таким образом, используя (2.13), получаем из (2.8)

$$F(1 + is, 1 - is, 2, -u) = -\frac{\text{th } \pi s}{2\pi s} [R_1^+(u, s) + R_1^-(u, s)] = \\ = \frac{\text{th } \pi s}{\pi s u} \left[\frac{\sin s\beta}{s} - \int_{\beta}^{\infty} \frac{\cos \eta s \left(\text{sh } \frac{\eta}{2} - \sqrt{\text{sh}^2 \frac{\eta}{2} - \text{sh}^2 \frac{\beta}{2}} \right)}{\sqrt{\text{sh}^2 \frac{\eta}{2} - \text{sh}^2 \frac{\beta}{2}}} d\eta \right]. \\ (|\text{Im } s| < 1) \quad (2.14)$$

Рассмотрим по аналогии с тем, как это делается в теории функций Лежандра [115], интеграл

$$I = \int_C e^{-i\eta s} \frac{\text{sh } \frac{\eta}{2} + i \sqrt{\text{sh}^2 \frac{\beta}{2} - \text{sh}^2 \frac{\eta}{2}}}{\sqrt{\text{sh}^2 \frac{\beta}{2} - \text{sh}^2 \frac{\eta}{2}}} d\eta,$$

взятый по контуру, состоящему из проходимой слева направо действительной оси с обходом точек $\eta = \pm \beta$ снизу по малым полукругностям, и равный ему интеграл I' по прямой $\text{Im } \eta = -\pi$. Приравнявая затем нулю вещественную и мнимую части, имеем для I

$$I = i \left[\frac{\sin \beta s}{s} - \int_{\beta}^{\infty} \cos \eta s \frac{\text{sh } \frac{\eta}{2} - \sqrt{\text{sh}^2 \frac{\eta}{2} - \text{sh}^2 \frac{\beta}{2}}}{\sqrt{\text{sh}^2 \frac{\eta}{2} - \text{sh}^2 \frac{\beta}{2}}} d\eta - \right. \\ \left. - \int_0^{\beta} \sin \eta s \frac{\text{sh } \frac{\eta}{2}}{\sqrt{\text{sh}^2 \frac{\beta}{2} - \text{sh}^2 \frac{\eta}{2}}} d\eta \right]. \quad (2.15)$$

В то же время

$$I' = I = -ie^{-\pi s} \int_0^{\infty} \cos ts \frac{\text{ch } \frac{t}{2} - \sqrt{\text{sh}^2 \frac{\beta}{2} + \text{ch}^2 \frac{t}{2}}}{\sqrt{\text{sh}^2 \frac{\beta}{2} + \text{ch}^2 \frac{t}{2}}} dt. \quad (2.16)$$

Таким образом, используя (2.15), (2.16) и (2.14), получим

$$F(1 + is, 1 - is, 2, -u) = \frac{\text{th } \pi s}{2\pi s u} \left[\int_0^{\beta} \frac{\sin \eta s \text{sh } \frac{\eta}{2} d\eta}{\sqrt{\text{sh}^2 \frac{\beta}{2} - \text{sh}^2 \frac{\eta}{2}}} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -e^{-\pi s} \int_0^{\infty} \cos ts \frac{\operatorname{ch} \frac{t}{2} - \sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{ch}^2 \frac{t}{2}}}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{ch}^2 \frac{t}{2}}} dt = \\
& = \frac{\operatorname{th} \pi s}{2\pi s u} \left[- \int_0^{\beta} \frac{\sin \eta s \operatorname{sh} \frac{\eta}{2} d\eta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2}}} - \right. \\
& \left. - e^{\pi s} \int_0^{\infty} \cos ts \frac{\operatorname{ch} \frac{t}{2} - \sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{ch}^2 \frac{t}{2}}}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{ch}^2 \frac{t}{2}}} dt \right]. \quad (2.17)
\end{aligned}$$

В результате имеем

$$F(1 + is, 1 - is, 2, -u) = \frac{1}{\pi s u} \int_0^{\beta} \frac{\sin \eta s \operatorname{sh} \frac{\eta}{2} d\eta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2}}}. \quad (2.18)$$

Представление (2.18) будет широко использоваться в последующем изложении.

Согласно (2.13) и (2.18) имеем

$$F(s, -u) = -\frac{2}{\pi s(1 + s^2)} \frac{d}{du} \left(\frac{1}{u} \int_0^{\beta} \frac{\sin \eta s \operatorname{sh} \frac{\eta}{2} d\eta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2}}} \right), \quad (2.19)$$

$$u = \operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2}.$$

Откуда

$$\begin{aligned}
F(s, -u) &= \frac{2}{\pi s(1 + s^2) u^2} \int_0^{\beta} \frac{\operatorname{sh} \frac{\eta}{2} \sin \eta s - s \operatorname{th}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{ch} \frac{\eta}{2} \cos \eta s}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2}}} d\eta = \\
&= \frac{4}{\pi s u^2 (1 + u)} \int_0^{\beta} \sin \eta s \operatorname{sh} \frac{\eta}{2} \sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2}} d\eta. \quad (2.20)
\end{aligned}$$

Аналогичным образом могут быть получены следующие представления, которые понадобятся позднее:

$$\begin{aligned}
F(is, -is, 2, -u) &\equiv F_0(s, -u) = \\
&= \frac{1}{\pi s u} \int_0^{\beta} \frac{\operatorname{sh} \frac{\eta}{2} \left(\operatorname{ch} \eta - \operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} \right) \sin \eta s d\eta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2}}} = \\
&= \frac{1}{\pi(1 + s^2)} \int_0^{\beta} \frac{s \operatorname{cth}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{sh} \frac{\tau}{2} \sin s\tau + \operatorname{ch} \frac{\tau}{2} \cos s\tau}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\tau}{2}}} d\tau. \quad (2.21)
\end{aligned}$$

Наряду с приведенными представлениями в виде интеграла по конечному отрезку значительную роль играют в дальнейшем представления, аналогичные (2.14). Прежде всего, используя (2.14) и (2.3), получим

$$\begin{aligned} F(s, -u) &\equiv F(2 + is, 2 - is, 3, -u) = \\ &= \frac{\operatorname{th} \pi s}{\pi s(1 + s^2)} \frac{d}{du} (R_1^+ + R_1^-) = \frac{\operatorname{th} \pi s}{\pi s(1 + s^2)} (R^+ + R^-), \end{aligned} \quad (2.22)$$

где

$$\begin{aligned} R^+(s, u) &= \frac{d}{du} R_1^+(s, u) = -\frac{1}{2u^2} \int_{\beta}^{\infty} e^{i\pi s} \frac{\operatorname{sh} \frac{\eta}{2} - is \operatorname{th}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{ch} \frac{\eta}{2}}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2}}} d\eta \\ (R^-(s, u) &= R^+(-s, u)) \end{aligned} \quad (2.23)$$

и очевидным образом может быть продолжена аналитически в нижнюю полуплоскость. Далее, поступая подобно тому, как при выводе формулы (2.14), можно получить представление

$$\begin{aligned} F_0(s, -u) &= F(is, -is, 2, -u) = \\ &= -\frac{i(1+u)}{4\pi(1+s^2)} \operatorname{th} \pi s \frac{d}{du} [\Phi_0^+(s, u) - \Phi_0^-(s, u)] = \\ &= \frac{1+u}{4\pi} \frac{s}{1+s^2} \operatorname{th} \pi s (R_0^+ + R_0^-). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Здесь

$$\Phi_0^{\pm} = \int_{\beta}^{\infty} \frac{e^{\pm i\pi s} \operatorname{ch} \frac{\eta}{2} d\eta}{\left(\operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2}\right)^{1/2}}; \quad R_0^{\pm} = \int_{\beta}^{\infty} \frac{e^{\pm i\pi s} \operatorname{sh} \frac{\eta}{2} d\eta}{\left(\operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2}\right)^{1/2}}. \quad (2.25)$$

Отметим, что сходство как самих формул интегральных представлений, так и метода их получения с соответствующими интегральными представлениями функций Лежандра неслучайно. Дело в том, что рассматриваемое семейство функций связано с функциями Лежандра соотношением

$$\begin{aligned} F(n + is, n - is, c, -u) &= \\ &= (-1)^n \frac{\Gamma(c) \Gamma(is) \Gamma(-is)}{2\Gamma(n + is) \Gamma(n - is)} \frac{d^n}{du^n} \left[\left(\frac{u}{u+1} \right)^{\frac{n-c+1}{2}} \times \right. \\ &\quad \left. \times (P_{-is}^{n-c+1}(1+2u) + P_{is}^{n-c+1}(1+2u)) \right], \end{aligned} \quad (2.26)$$

которое можно получить, используя общую связь функций Лежандра с гипергеометрическими функциями. Из (2.26) можно получить и приведенные интегральные представления, однако соответствующие вычисления весьма громоздки.

§ 3. Обобщение интегрального преобразования по переменной w

Воспользуемся выведенными формулами для того, чтобы несколько обобщить формулы разложения и обращения (1.5) и (1.6) и расширить их область применимости. Для этого применим общий прием выхода в комплексную плоскость параметра s [35, 200].

Положим

$$Q^{\pm}(s, u) = \frac{2}{\pi u^2 (1+u)} \int_0^{\beta} e^{\pm i n s} \operatorname{sh} \frac{\eta}{2} \sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2}} d\eta. \quad (3.1)$$

Очевидно $Q^{\pm}(s, u)$ — целые аналитические функции s , экспоненциально убывающие соответственно в верхней и нижней полуплоскости. Согласно (2.20)

$$F(s, -u) = \frac{1}{is} [Q^{+}(s, u) - Q^{-}(s, u)]. \quad (3.2)$$

Интегралы

$$G^{\pm}(s) = \int_0^{\infty} (1+v) Q^{\pm}(s, v) g(v) dv \quad (3.3)$$

равномерно сходятся для любой ограниченной функции $g(v)$ при $\operatorname{Im} s \geq \delta > 0$ (соответственно при $\operatorname{Im} s \leq -\delta < 0$) и представляют собой аналитические функции s в соответствующих полуплоскостях. Далее они называются «плюс» и «минус-трансформантами» (преобразованиями) функции g .

Если существует определенная выше трансформанта $g^{*}(s)$, то

$$g^{*}(s) = [G^{+}(s) - G^{-}(s)]/is.$$

Причем $G^{+}(s) = G^{-}(-s)$.

Используя (3.1), представим «плюс-трансформанту» $G^{+}(s)$ в виде

$$G^{+}(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{i n s} \tilde{g}(\eta) d\eta. \quad (3.4)$$

где

$$\tilde{g}(\eta) = \operatorname{sh} \frac{\eta}{2} \int_{\operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2}}^{\infty} v^{-2} g(v) \sqrt{v - \operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2}} dv. \quad (3.5)$$

Очевидно, функция $\tilde{g}(\eta)$ определена для любой функции $g(v)$, растущей при $v \rightarrow \infty$ не быстрее $v^{1/\varepsilon - \epsilon}$, $\varepsilon > 0$. Соотношение (3.4) показывает, что $G^{+}(s)$ является «плюс-преобразованием» Фурье

функции $\tilde{g}(\eta)$ в обычном смысле [200], и потому по формуле обращения

$$\tilde{g}(\xi) = \frac{1}{4} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} e^{-is\xi} G^+(s) ds, \quad c > 0. \quad (3.6)$$

Допустим, что $\tilde{g}(\xi)$ найдено. Тогда для $g(v)$ имеем уравнение

$$\tilde{g}(\xi) = \text{sh} \frac{\xi}{2} \int_{\text{sh}^2 \frac{\xi}{2}}^{\infty} g(v) \sqrt{v - \text{sh}^2 \frac{\xi}{2}} \frac{dv}{v^2}. \quad (3.7)$$

Полагая

$$\zeta = \frac{1}{v}, \quad y(\zeta) = g(1/\zeta), \quad (3.8)$$

это уравнение можно привести к виду уравнения Абеля [84]

$$\frac{\tilde{g}(\xi)}{\text{sh}^2 \frac{\xi}{2}} = X(\omega) = \int_0^{\omega} \frac{\chi(\zeta) d\zeta}{\sqrt{\omega - \zeta}}; \quad \chi(\zeta) = \int_0^{\zeta} \frac{y(\xi) d\xi}{\sqrt{\zeta - \xi}}, \quad \omega = \text{sh}^{-2} \frac{\xi}{2}. \quad (3.9)$$

Решая это уравнение, найдем

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\omega} \int_0^{\omega} \frac{X(\zeta) d\zeta}{\sqrt{\omega - \zeta}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega} \frac{X'(\zeta) d\zeta}{\sqrt{\omega - \zeta}}, \quad (3.10)$$

поскольку из (3.7) и (3.9) следует, что $X(0) = 0$.

Далее,

$$y(\omega) = \sqrt{\omega} \frac{d\chi}{d\omega} = \frac{\sqrt{\omega}}{\pi} \frac{d}{d\omega} \int_0^{\omega} \frac{X'(\zeta) d\zeta}{\sqrt{\omega - \zeta}}.$$

Положим $v = 1/\omega$. Получим

$$g(v) = y(\omega) = -\frac{1}{\pi} v^{3/2} \frac{d}{dv} \int_0^{1/v} \frac{X'(\zeta) d\zeta}{\sqrt{\frac{1}{v} - \zeta}}. \quad (3.11)$$

Таким образом,

$$g(v) = -\frac{2v^{3/2}}{\pi} \frac{d}{dv} \sqrt{v} \int_{2 \operatorname{arsh} \sqrt{v}}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\xi}{2} \tilde{g}(\xi) - \operatorname{sh} \frac{\xi}{2} \tilde{g}'(\xi)}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\xi}{2} - v \operatorname{sh}^2 \frac{\xi}{2}}} d\xi. \quad (3.12)$$

Подставляя сюда выражение (3.6), получим формулу обращения в виде

$$\begin{aligned}
 g(v) = & -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} v^{1/2} \frac{d}{dv} \left[V_v^- G^+(s) \int_{2 \operatorname{arsh} \sqrt{v}}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\xi}{2} + is \operatorname{sh} \frac{\xi}{2}}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\xi}{2} - v}} \times \right. \\
 & \times \left. e^{-is\xi} \frac{d\xi}{\operatorname{sh}^2 \frac{\xi}{2}} \right] ds = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} v^{1/2} \frac{d}{dv} \times \\
 & \times \left[\frac{1}{v} \int_{\beta}^{\infty} \frac{is G^+(s) \left(2 \operatorname{sh}^2 \frac{\xi}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} \right)}{\operatorname{sh}^2 \frac{\xi}{2} \sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\xi}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2}}} e^{-is\xi} d\xi \right] ds. \quad (3.13) \\
 v = & \operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2}.
 \end{aligned}$$

Можно показать, что выражение

$$v^{1/2} \frac{d}{dv} \left[V_v^- \int_{2 \operatorname{arsh} \sqrt{v}}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\xi}{2} + is \operatorname{sh} \frac{\xi}{2}}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\xi}{2} - v}} e^{-is\xi} \frac{d\xi}{\operatorname{sh}^2 \frac{\xi}{2}} \right]$$

равно в общей области аналитичности

$$is \int_{\beta}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\xi}{2} + is \operatorname{ch} \frac{\xi}{2} \operatorname{th}^2 \frac{\beta}{2}}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\xi}{2} - v}} e^{-is\xi} d\xi = 2isv^2 R^-(s, v).$$

Таким образом, оно дает аналитическое продолжение $R^-(s, v)$ вплоть до прямой $\operatorname{Im} s = 1$.

В результате можно переписать представление (3.13) в виде

$$g(v) = \frac{v^2}{\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} is G^+(s) R^-(s, v) ds. \quad (3.14)$$

Заметим теперь, что в силу аналитичности и экспоненциального убывания $G^+(s)$ и $R^+(s, v)$ в верхней полуплоскости имеем

$$\frac{v^2}{\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} is G^+(s) R^+(s, v) ds = 0.$$

В результате можно записать

$$\begin{aligned}
 g(v) = & \frac{v^2}{\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} is G^+(s) (R^+ + R^-) ds = \\
 = & iv^2 \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} s^2 (1 + s^2) \operatorname{cth} \pi s G^+(s) F(s, -v) ds. \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

Совершенно аналогично можно получить

$$g(v) = -iv^2 \int_{-\infty - i\epsilon}^{\infty - i\epsilon} s^2 (1 + s^2) \operatorname{cth} \pi s G^-(s) F(s, -v) ds. \quad (3.16)$$

Если представления (3.15) и (3.16) сохраняют смысл вплоть до вещественной оси, то, складывая их, получим

$$g(v) = \frac{v^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^3 (1 + s^2)}{\operatorname{th} \pi s} g^*(s) F(s, -v) ds, \quad (3.17)$$

т. е. вновь формулу обращения (1.5). Когда переход к интегрированию по вещественной оси недопустим, могут быть использованы приведенные выше соотношения (3.14) и (3.15). Далее, используя соотношение

$$\frac{1}{\pi} u^2 \int_{-\infty - i\epsilon}^{\infty - i\epsilon} is G^-(s) R^-(s, u) ds = 0,$$

можно записать формулу обращения в виде

$$\begin{aligned} g(u) &= \frac{u^2}{\pi} \int_{-\infty + i\epsilon}^{\infty + i\epsilon} is G^+(s) R^-(s, u) ds - \\ &- \frac{u^2}{\pi} \int_{-\infty + i\epsilon}^{\infty + i\epsilon} is G^-(s) R^-(s, u) ds = -\frac{u^2}{\pi} \int_{-\infty + i\epsilon}^{\infty + i\epsilon} s^2 g^*(s) R^-(s, u) ds. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Рассмотрим в качестве примера часто встречающуюся функцию

$$g(u) = H(a - u), \quad (3.19)$$

где H — функция скачка Хевисайда.

Имеем

$$g^*(s) = \int_0^a (1 + v) F(s, -v) dv = \frac{2}{s^2} [1 - F_0(s, -a)]. \quad (3.20)$$

Таким образом, «прямое» преобразование вычисляется в данном случае элементарно. Однако выполнить обратное преобразование по формуле (1.6) непосредственно нельзя из-за медленного убывания $g^*(s)$ при $s \rightarrow \infty$.

Используя представление (2.21) для $F_0(s, -a)$, положим

$$g^*(s) = \frac{1}{is} [G^+(s) - G^-(s)],$$

$$G^\pm(s) = \mp \frac{1}{is} + \frac{1}{2\pi as^2} \int_0^\alpha \frac{\text{sh } 1/2 \tau (\text{ch } \tau - \text{sh}^2 1/2 \alpha)}{\sqrt{\text{sh}^2 1/2 \alpha - \text{sh}^2 \tau/2}} e^{\pm is\tau} d\tau, \quad (3.21)$$

$$a = \text{sh}^2 \frac{1}{2} \alpha.$$

В выражениях (3.21) можно, считая s лежащим в соответствующей полуплоскости, перейти к пределу при $a \rightarrow \infty$, получив при этом

$$G^\pm(s) = \mp 1/is. \quad (3.22)$$

Таким образом, имеем (по крайней мере, формально) соответствия

$$H(a-u) \xleftrightarrow{\cdot} 2s^{-2} [1 - F_0(s, -a)]; \quad 1 \xleftrightarrow{\cdot} 2s^{-2};$$

$$H(u-a) \xleftrightarrow{\cdot} 2s^{-2} F_0(s, -a). \quad (3.23)$$

Покажем теперь, как могут быть получены соответствующие формулы обращения. Пусть

$$g^*(s) = 2s^{-2}; \quad G^\pm(s) = \mp 1/is. \quad (3.24)$$

По формуле (3.6)

$$\tilde{g}(\eta) = -\frac{1}{4} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} e^{-i\eta s} \frac{d\eta}{i\eta} = \frac{1}{2} \pi. \quad (3.25)$$

Далее, по формуле (3.12)

$$g(v) = -\frac{2}{\pi} v^{1/2} \frac{d}{dv} \left[v^{1/2} \int_{2 \operatorname{arsh} v^{1/2}}^\infty \frac{\pi}{2} \frac{\text{ch } \xi/2}{\sqrt{\text{sh}^2 \xi/2 - v}} \frac{d\xi}{\text{sh}^2 \xi/2} \right] = 1. \quad (3.26)$$

Таким образом, соответствие

$$1 \xleftrightarrow{\cdot} 2s^{-2}$$

полностью доказано.

Пусть теперь

$$g^*(s) = \frac{2}{s^2} F_0(s, -a); \quad G^\pm(s) = \pm \frac{i}{\pi s^3} \int_0^\alpha \frac{\text{sh } 1/2 \tau \sin s\tau (\text{ch } \tau - \text{sh}^2 \alpha/2) d\tau}{\text{sh}^3 \alpha/2 \sqrt{\text{sh}^2 \alpha/2 - \text{sh}^2 \tau/2}}. \quad (3.27)$$

При $\beta > \alpha$ представим формулу обращения в виде

$$g(u) = -\frac{u^3}{\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} s^2 g^*(s) R^-(s, u) ds = \\ = \frac{u^{3/2}}{2\pi i} \frac{d}{du} \left[u^{1/2} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{1}{s} F_0(s, -a) \int_{\beta}^{\infty} \frac{\left(\operatorname{ch} \frac{\xi}{2} + is \operatorname{sh} \frac{\xi}{2} \right) e^{-is\xi} d\xi}{\operatorname{sh}^2 \frac{\xi}{2} \sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\xi}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2}}} ds \right]. \quad (3.28)$$

В силу условия $\beta > \alpha$ ($u > a$) можно замкнуть контур интегрирования дугой бесконечно большого радиуса, расположенной в нижней полуплоскости. При этом получим

$$g(u) = -2u^{3/2} \frac{d}{du} \left[\sqrt{u} \int_{\beta}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\xi}{2} d\xi}{\operatorname{sh}^2 \frac{\xi}{2} \sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\xi}{2} - u}} \right] = 1. \quad (3.29)$$

Напротив, при $\beta < \alpha$ аналогичные рассуждения применимы, если воспользоваться представлением (2.25). При этом легко получить

$$g(u) = 0. \quad (3.30)$$

Тем самым доказано последнее соответствие (3.23).

§ 4. Некоторые точные решения задач фильтрации с предельным градиентом

1. Рассмотрим следующую задачу для уравнения (4.1):

$$u(u+1)\psi_{uu} + (u-1)\psi_u + \psi_{\theta\theta} = 0; \quad 0 \leq u = w/\lambda < \infty; \quad (4.1)$$

$$\psi(u, 0) = 0; \quad \psi(u, \theta_0) = q\delta(u-a); \quad \psi(0, \theta) = 0 \quad (4.2)$$

Применим к уравнению (4.1) введенное выше интегральное преобразование по переменной u , т. е. помножим (4.1) на $(1+u)F(s_1-u)$ и проинтегрируем в пределах от 0 до ∞ . В результате получим после интегрирования по частям

$$\frac{d^2 \psi^*(s, \theta)}{d\theta^2} - s^2 \psi^*(s, \theta) = -2\psi(0, \theta) = 0. \quad (4.3)$$

В рассматриваемом случае правая часть в силу условий задачи равна нулю. Таким образом, учитывая граничные условия (4.2), получаем для преобразованной функции $\psi^*(s, \theta)$ следующую кра-

евую задачу:

$$\frac{d^2\psi^*}{d\theta^2} - s^2\psi^* = 0; \quad \psi^*(0) = 0; \quad \psi^*(\theta_0) = q(1+a)F(s, -a). \quad (4.4)$$

В результате имеем

$$\psi^*(s, \theta) = q(1+a)F(s, -a) \operatorname{sh} s\theta / \operatorname{sh} s\theta_0. \quad (4.5)$$

Используя формулу обращения (1.6), получим

$$\psi(u, \theta) = \frac{q(1+a)u^2}{2} \int_0^\infty \frac{s^3(1+s^2) \operatorname{sh} s\theta}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} F(s, -u) F(s, -a) ds. \quad (4.6)$$

2. Нетрудно понять физический смысл построенного решения. Используя формулы возвращения на физическую плоскость, убедимся, что линии $\theta = 0$ отвечает конечный отрезок оси x ; отрезку $u = 0$ — конечная дуга застойной зоны, а отрезком $\theta = \theta_0$, $u > a$ и $\theta = \theta_0$ и $u < a$ — лучи, составляющие угол θ_0 с осью x . Таким образом, построенное решение при $0 < \theta_0 < \pi$ отвечает обтеканию плоским фильтрационным потоком со скоростью $\bar{U} = a\lambda$ на бесконечности непроницаемой границы («стенки») с уступом (рис. 4.1).

Полученное решение представляет интерес в том отношении, что позволяет оценивать, хотя бы грубо, размеры застойных зон, создаваемых препятствиями в фильтрационном потоке вязко-пластической жидкости. Для расстояния OA имеем

$$OA = x_A = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} \frac{du}{u^2} = \frac{q(1+a)}{2\lambda} \int_0^\infty \frac{s^4 F(s, -a) ds}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0}. \quad (4.7)$$

Форма границы застойной зоны определяется общими соотношениями (4.21) главы III. Подставляя в них (4.6), получим

$$\begin{aligned} z(\theta) &= x_A + \frac{1}{\lambda} \int_0^\theta e^{i\theta} \chi(\theta) d\theta = \\ &= x_A + \frac{q(1+a)}{\lambda} e^{i\theta} \int_0^\infty \frac{s^3(s \operatorname{ch} s\theta - t \operatorname{sh} s\theta)}{\operatorname{th} \pi s} \Big|_{\theta=0}^{\theta=\theta} F(s, -a) ds. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Выражением (4.8) можно пользоваться при $\theta < \theta_0$; при $\theta = \theta_0$ нельзя дифференцирование и предельный переход выполнять под знаком интеграла. Поэтому предельный переход при $\theta \rightarrow \theta_0$ следует выполнять после вычисления интеграла (4.8).

3. Вычисление интегралов в соотношениях (4.7) и (4.8) может быть произведено с использованием интегральных представлений, установленных в § 2, и рядов Гаусса для гипергеометрических функций. Последнее представление удобно использовать при малых

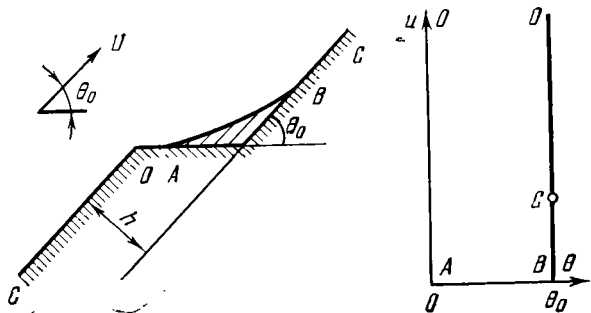


Рис. 4.1

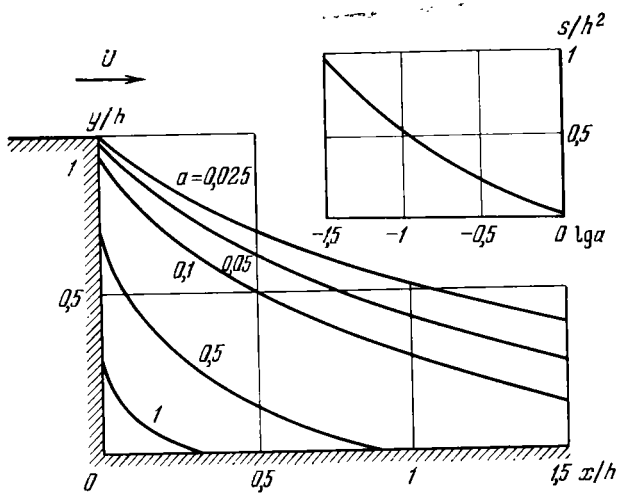


Рис. 4.2

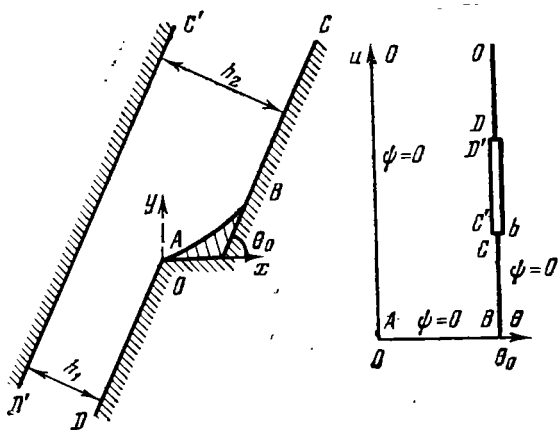


Рис. 4.3

значениях a ; при больших a удобнее преобразовать интегралы по полупрямой $s > 0$ в интегралы по всей оси $-\infty < s < \infty$, а затем, перенося контур интегрирования на прямую, параллельную действительной оси, получить выражение для x_A и $z(\theta)$ в виде ряда. Не останавливаясь на деталях вычислений, отметим лишь, что интегралы, входящие в (4.8), допускают следующие представления:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{s^3 \operatorname{sh} s\theta}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} F(s, -a) ds = \frac{\sin \theta}{a^2 (a+1) \sin \theta_0} - \frac{2 \sin (\pi \theta / \theta_0)}{a^2 (1+a) \theta_0} \int_a^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi \eta}{\theta_0} \operatorname{ch} \frac{\eta}{2} \left(2 \operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2} \right) d\eta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2}} \left(\operatorname{ch} \frac{\pi \eta}{\theta_0} + \cos \frac{\pi \eta}{\theta_0} \right)^2}; \quad (4.9)$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{s^4 \operatorname{ch} s\theta}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} F(s, -a) ds = \frac{\cos \theta}{a^2 (a+1) \sin \theta_0} - \frac{2\pi}{a^2 (a+1) \theta_0^2} \int_a^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi \eta}{\theta_0} \operatorname{ch} \frac{\eta}{2} \left(2 \operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2} \right)}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2}}} \times \\ \times \left(\frac{\cos \frac{\pi \theta}{\theta_0}}{Z^2} + \frac{2 \sin^2 \frac{\pi \theta}{\theta_0}}{Z^3} \right) d\eta; \quad (4.10)$$

$$Z = \operatorname{ch} \frac{\pi \eta}{\theta_0} + \cos \frac{\pi \theta}{\theta_0}.$$

Причем

$$I(\theta_0) = a^{-2}/(a+1);$$

$$I_1(\theta_0) = \frac{\operatorname{ctg} \theta_0}{a^2 (a+1)} + \frac{\pi}{a^2 (a+1) \theta_0^2} \int_a^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi \eta}{2\theta_0}}{\operatorname{sh}^3 \frac{\pi \eta}{2\theta_0}} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\eta}{2} \left(2 \operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2} \right) d\eta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2}}} \quad (4.11)$$

Подсчитаем теперь «высоту выступа», т. е. расстояние по нормали к границе между линиями CO и BC . Если x_0 и y_0 — координаты точки B , то

$$h = x_0 \sin \theta_0 - y_0 \cos \theta_0 = -\operatorname{Im}(z_0 e^{-i\theta_0}) = q(1+a)I/\lambda. \quad (4.12)$$

Таким образом, «интенсивность» δ -функции q и высота выступа h связаны соотношением

$$q = \lambda a^2 h. \quad (4.13)$$

4. Случай прямоугольного уступа. Наиболее простой частный случай — прямоугольный уступ ($\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$).

В этом случае интегралы в (4.9) и (4.10) могут быть вычислены в конечном виде; фактически расчет в этом случае проводился несколько иным, более громоздким, способом, приводящим к выражениям, с точностью до замены переменной совпадающим с приведенными выше [27]. Результаты расчета представлены на рис. 4.2 (показаны границы застойных зон и зависимость безразмерной площади застойных зон S/h^2 от интенсивности потока a).

Наиболее важная и в известной степени неожиданная особенность результата заключается в том, что застойные зоны, вообще говоря, сравнительно невелики вплоть до весьма малых значений параметра a . Это показывает прежде всего, что интуитивное представление об опасности появления застойных зон («теней») при обтекании препятствий фильтрационным потоком вязко-пластической жидкости несколько обманчиво. С другой стороны, это позволяет пользоваться асимптотикой малых a при расчете практически интересных случаев.

Отметим, что в данном случае

$$I(0) = 0; \quad I(1/2\pi) = a^2/(a+1); \quad (4.14)$$

$$I_1(0) = \frac{1}{a^2(a+1)} \left[1 - \frac{1}{\pi} \frac{a(1-a)^2}{(a+1)} + \right. \\ \left. + \frac{12}{\pi} \frac{(1-a^2)}{(1+2a)^{3/2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \sqrt{1+2a} \right) \right]. \quad (4.15)$$

При $\theta = 1/2\pi$

$$I_1 = \frac{1-a}{\pi a^2(1+a)^3} \left[2 + \frac{\pi - 2 \arctg \sqrt{a}}{\sqrt{a}} \right]. \quad (4.16)$$

Таким образом, для точки B схода застойной зоны имеем из (4.8)

$$x_B = h; \quad y_B = \frac{h}{\pi(a+1)} \left[2 + \frac{\pi - 2 \arctg \sqrt{a}}{\sqrt{a}} \right] \quad (4.17)$$

и при $a \rightarrow 0$

$$y_B \approx \frac{h}{\sqrt{a}} \left[1 - \left(3 - \frac{2}{3\pi} \right) a + O(a^2) \right]. \quad (4.18)$$

Соотношения (4.17) и (4.18) позволяют грубо оценивать размеры застойных зон.

5. Полученное решение (обозначим его через $\psi_0(u, \theta, a, \theta_0)$) позволяет построить ряд других точных решений, имеющих иную физическую интерпретацию.

Рассмотрим

$$\psi(u, \theta) = \int_b^c \psi_0(u, \theta, a, \theta_0) da = \\ = qu^2 \int_0^\infty \frac{s(1+s^2) \operatorname{sh} s\theta}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} F(s, -u) [F_0(s, -b) - F_0(s, -c)] ds. \quad (4.19)$$

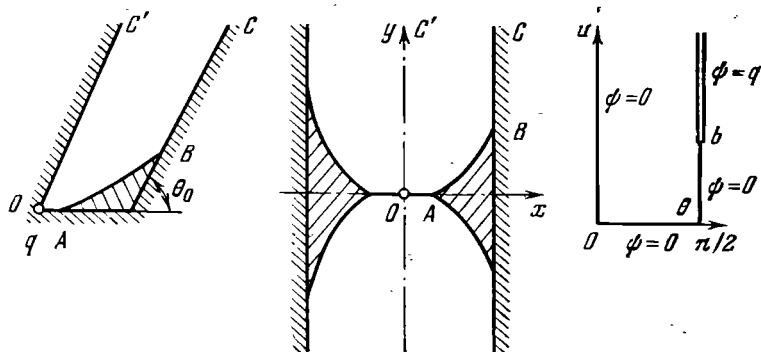


Рис. 4.4

Решение вида (4.19) удовлетворяет уравнению (4.1) в той же полуплоскости при краевых условиях

$$\begin{aligned} \psi(u, 0) = \psi(0, u) = 0. \quad \psi(u, \theta_0) = 0 \quad (u < b \text{ или } u > c); \\ \psi(u, \theta_0) = q \quad (b < u < c) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Используя формулы возвращения на физическую плоскость, легко убедиться, что решение (4.19) отвечает фильтрационному потоку между прямолинейной и ступенчатой непроницаемыми границами (рис. 4.3), причем q — полный расход потока, а расстояния между границами в узкой h_1 и широкой h_2 частях равны

$$h_1 = q/c\lambda, \quad h_2 = q/\lambda b. \quad (4.21)$$

Соответствующие выражения для координат границы застойной зоны могут быть найдены интегрированием по a выражения (4.8) и полученных из него упрощенных представлений раздела 3 данного параграфа.

Не останавливаясь на этом более подробно, перейдем в решении (4.19) к пределу $c \rightarrow \infty$. При этом решение принимает вид

$$\psi = \psi_1(u, \theta, b, \theta_0) = qu^2 \int_0^\infty \frac{s(1+s^2) \operatorname{sh} s\theta}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} F(s, -u) F_0(s, -b) ds. \quad (4.22)$$

Согласно (4.21) при этом $h_1 \rightarrow 0$, так что в пределе получаем конфигурацию рис. 4.4, т. е. течение, создаваемое точечным источником, помещенным в начале координат O . Вновь наиболее практически интересный случай отвечает $\theta_0 = 1/2\pi$. В силу симметрии он отвечает течению, создаваемому бесконечной цепочкой источников с равным дебитом $4q$, находящихся на расстоянии $2L = 2q/\lambda b$ друг от друга. Таким образом, полученное решение моделирует

часто встречающуюся в нефтепромысловой практике систему расположения скважин длинными рядами (цепочками).

Координаты границы застойной зоны получим, интегрируя выражение (4.8) по a от b до ∞ . Имеем

$$z_1(\theta) = \frac{2q}{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{s(s \operatorname{ch} s\theta - i \operatorname{sh} s\theta) e^{i\theta}}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} F_0(s, -b) ds \equiv \frac{2q}{\lambda} [I_3 - I_4]. \quad (4.23)$$

Прибегнем к тому же приему, что и при выводе выражений (4.9) и (4.10). В результате получим

$$I_3 = \frac{\sin \theta}{2b \sin \theta_0} - \frac{\sin \frac{\pi\theta}{\theta_0}}{b\theta_0} \int_{\beta}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\eta}{2} \left(\operatorname{ch} \eta - \operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} \right) d\eta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2}}} C(\theta, \eta) \quad (4.24)$$

и

$$I_4 = \frac{\cos \theta}{2b \sin \theta_0} - \frac{\pi}{b\theta_0} \int_{\beta}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\eta}{2} \left(\operatorname{ch} \eta - \operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} \right) \left(1 + \cos \frac{\pi\theta}{\theta_0} \operatorname{ch} \frac{\pi\eta}{\theta_0} \right) d\eta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2}}} C^2(\theta, \eta); \quad (4.25)$$

$$C(\theta, \eta) = \operatorname{ch} \frac{\pi\eta}{\theta_0} + \cos \frac{\pi\theta}{\theta_0}.$$

Так что

$$z_1(\theta) = -\frac{q}{\lambda b} e^{i\theta} \left[-\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\sin \theta_0} + \right. \\ \left. + \frac{2}{\theta_0} \int_{\beta}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\eta}{2} \left(\operatorname{ch} \eta - \operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} \right)}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2}}} \times \right. \\ \left. \times \frac{\frac{\pi}{\theta_0} \left(1 + \cos \frac{\pi\theta}{\theta_0} \operatorname{ch} \frac{\pi\eta}{\theta_0} \right) - i \sin \frac{\pi\theta}{\theta_0} C(\theta, \eta)}{C^2(\theta, \eta)} d\eta \right]. \quad (4.26)$$

Определим координаты вершин застойной зоны, отвечающие углам $\theta = 0$ и $\theta = \theta_0$. Имеем

$$z_1(0) = \frac{q}{\lambda b} \left[\frac{1}{\sin \theta_0} - \frac{2\pi}{\theta_0^2} \int_{\beta}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\eta}{2} \left(\operatorname{ch} \eta - \operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} \right)}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2}}} \frac{d\eta}{1 + \operatorname{ch} \frac{\pi\eta}{\theta_0}} \right]; \quad (4.27)$$

$$z_1(\theta_0) = \frac{q}{\lambda b} e^{i\theta_0} \left[\operatorname{ctg} \theta_0 - i + \frac{\pi}{\theta_0^2} \int_{\beta}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\eta}{2} \left(\operatorname{ch} \eta - \operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} \right) d\eta}{\operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} \left(\operatorname{ch} \frac{\pi \eta}{\theta_0} - 1 \right)} \right]. \quad (4.28)$$

На рис. 4.5, 4.6 показано расположение и размеры застойных зон в двух наиболее интересных случаях ($\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$, $\theta_0 = \pi$). На-

помним, что первый из них соответствует течению, создаваемому цепочкой равнодебитных скважин, расположенной в неограниченном пласте, а второй — такой же цепочкой, расположенной параллельно непроницаемой границе (экрану). За характерную скорость U в обоих случаях взята средняя скорость потока вдали от цепочки. Видно, что во втором случае застойные зоны занимают уже при сравнительно небольших интенсивностях потока $b = U/\lambda$ почти все пространство между цепочкой и экраном.

Рассмотрим следующую задачу для уравнения (4.1): в полуплоскости $0 \leq \theta \leq \leq \theta_0$; $0 \leq u \leq \infty$;

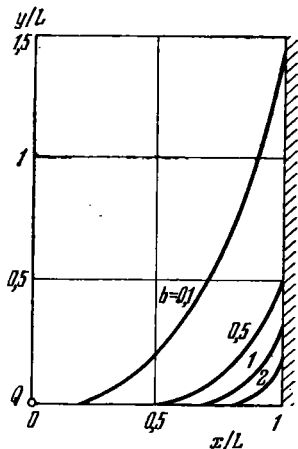


Рис. 4.5

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0 \quad (0 \leq u < \infty); \quad \psi = 0 \quad (u = 0); \quad (4.29)$$

$$\psi = 0 \quad (\theta = 0; \quad u \leq b); \quad \psi = q \quad (\theta = 0, \quad u > b).$$

Очевидно, искомое решение (обозначим его через ψ_2) совпадает с решением задачи в полуплоскости ширины $\theta_1 = 2\theta_0$ при симметричных условиях

$$\psi(u, 0) = \psi(u, \theta_1) = qH(u - b). \quad (4.30)$$

Поэтому решение ψ_2 может быть выражено через построенное выше решение ψ_1

$$\psi_2 = \psi_1(u, \theta, \theta_1, b) + \psi_1(u, \theta_1 - \theta, \theta_1, b). \quad (4.31)$$

Смысл полученного решения легко выясняется; это решение отвечает течению между непроницаемыми параллельными оси x границами, создаваемому наклоненной под углом $\theta_0 + \frac{1}{2}\pi$ к границе линией постоянного напора. Интересен случай $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$, соответствующий течению, создаваемому трещиной, рассматриваемой как поверхность постоянного давления, расположенная между двумя непроницаемыми границами (рис. 4.7, где трещине отвечает отрицательная полуось x).

Используя (4.31), для координат границы застойной зоны получаем

$$z_2(\theta) = z_0 + z_1(\theta, \pi, b) + \bar{z}_1(\pi - \theta, \pi, b) \quad (4.32)$$

(черта обозначает переход к комплексно-сопряженным величинам, постоянная z_0 определяет расстояние AB). Для AB имеем

$$AB = -\frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{\partial \psi}{\partial u} \Big|_{\theta=1/2\pi} \frac{du}{u} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \psi(u, 1/2\pi) \frac{du}{u^2}. \quad (4.33)$$

Из (4.31)

$$\psi = qu^2 \int_0^{\infty} \frac{s(1+s^2) [\operatorname{sh} s\theta + \operatorname{sh} s(\pi - \theta)]}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} \pi s} F(s, -u) F_0(s, -b) ds. \quad (4.34)$$

Подставляя это выражение в (4.33), получим

$$AB = \frac{4q}{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{s \operatorname{ch} \pi s \operatorname{sh} \frac{\pi s}{2}}{\operatorname{sh}^2 \pi s} F_0(s, -b) ds. \quad (4.35)$$

Используя представление Эйлера и формулы аналитического продолжения гипергеометрических функций и меняя порядок интегрирования в возникающем двойном интеграле, получим

$$AB = -\frac{2q}{\pi \lambda b} \int_0^1 \left[\ln \frac{v^2}{1+v^2} + \frac{2}{1+v^2} \right] (1-t) dt, \quad v = \frac{t(1-t)}{t+b}. \quad (4.36)$$

Результаты определения границы застойной зоны при притоке к трещине показаны на рис. 4.8 для нескольких значений b .

Взаимным к построенному является течение, отвечающее в плоскости годографа задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= h\delta(u-a); \theta=0; \\ \psi &= 0 (u=0, 0 \leq \theta \leq \theta_0; \theta=\theta_0, 0 \leq u < \infty). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Легко убедиться, что это течение отвечает обтеканию фильтрационным потоком со скоростью λa зубчатой стенки.

Решение задачи, как нетрудно видеть, имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(u, \theta, \theta_0, a) &= \\ &= \frac{(1+a)hu^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{s^2(1+s^2) \operatorname{sh} s(\theta - \theta_0)}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{ch} s\theta_0} F(s, -a) F(s, -u) ds. \end{aligned} \quad (4.38)$$

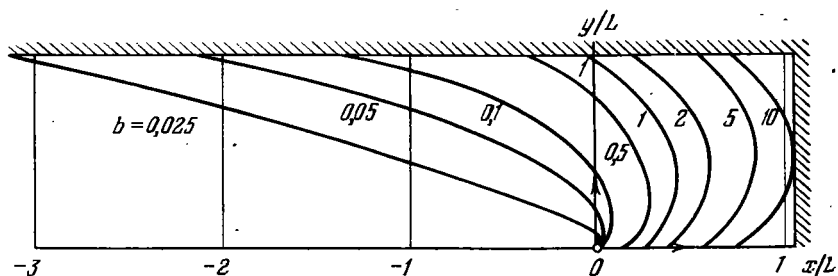


Рис. 4.6

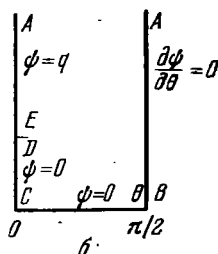
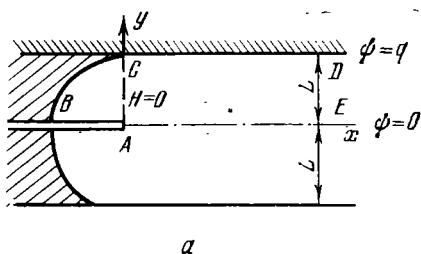


Рис. 4.7

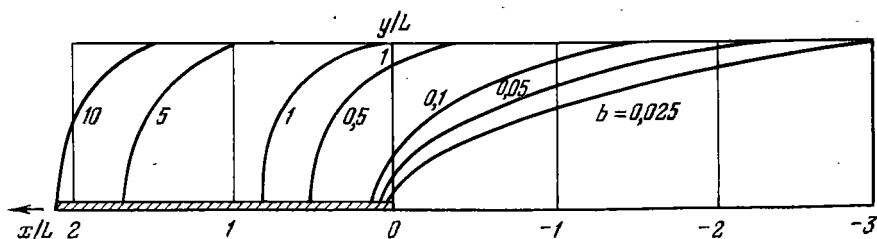


Рис. 4.8

Застойные зоны, образующиеся во впадинах, могут быть рассчитаны по аналогии с разделом 1 данного параграфа.

Отметим еще задачи, взаимные к ранее рассмотренным, для которых легко построить точное решение в плоскости годографа:

а) течение, создаваемое ступенчатой линией постоянного напора, и течение между ступенчатой и прямолинейной линиями постоянного напора;

б) обтекание пластинки между двумя параллельными линиями постоянного напора.

Так же, как и предыдущая, эти задачи не имеют достаточно полезных приложений в теории фильтрации, но представляют существенный интерес для аналогичных задач теории пластичности и нелинейной упругости [188—190].

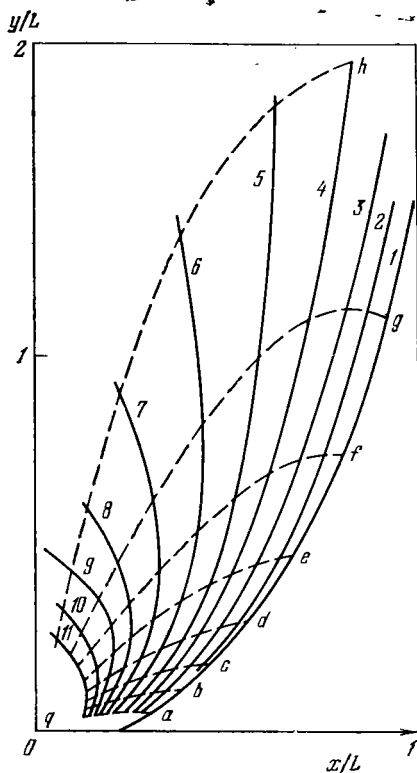


Рис. 4.4

мере течения, создаваемого цепочкой скважин в бесконечном пласте. Примем за начало координат xy в физической плоскости один из источников (рис. 4.4). Имеем

$$z(\theta, u) = \frac{2q}{\lambda} e^{i\theta} \int_0^\infty \frac{s F_0(s, -b)}{\operatorname{sh} s \theta_0 \operatorname{th} \pi s} \times \\ \times [s \operatorname{ch} s \theta F_1(s, -u) - 2i \operatorname{sh} s \theta F(is, -is, 1, -u)] ds; \quad (4.39)$$

$$\psi(u, \theta) = qu^2 \int_0^\infty \frac{s(1+s^2) \operatorname{sh} s \theta}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s \theta_0} F(s, -u) F_0(s, -b) ds; \quad (4.40)$$

$$H(u, \theta) - H(v, \theta) = q \int_0^\infty \frac{1+s^2}{\operatorname{th} \pi s} \frac{\operatorname{ch} s \theta}{\operatorname{sh} s \theta_0} \times \\ \times [F_0(s, -v) - F_0(s, -u)] F_0(s, -b) ds. \quad (4.41)$$

6. Отметим, что в принципе приведенные задачи можно было бы решать и методом Фурье, разлагая решение в ряд по синусам и косинусам. Такое решение легко получить и для прямоугольной области, имеющей конечную протяженность по u : $0 \leq \theta \leq \theta_0$; $a \leq u \leq b$. При этом могут быть получены точные решения для областей с границами специальной формы, как это делается при решении обратных задач теории фильтрации [160, 161] и как это было предложено в задаче о концентрации напряжений вблизи вырезов в пластических телах Нейбером [259].

7. До сих пор речь шла лишь об определении решения в плоскости годографа и о построении границы застойной зоны как наиболее важной качественной характеристики течения с предельным градиентом. Однако те же методы применимы и для расчета всего поля течения в целом.

Демонстрируем возможную технику вычислений на при-

Формулы (4.39) — (4.41) задают зависимости $u(x, y)$ и $\theta(x, y)$, $\psi(x, y)$ и $H(x, y)$ в неявной и параметрической форме. Вычисляя интегралы с использованием рядов Гаусса и интегральных представлений гипергеометрических функций, выведенных в предыдущей главе, можно построить сетку течения. На рис. 4.9 показаны рассчитанные таким образом линии $\theta = \text{const}$, $u = \text{const}$ при $b = 0,1$. Первые из них, отмеченные буквами $a \div h$, соответствуют $\theta = 0,524 \div 1,44$ с шагом $\pi/12$; линии с номером j отвечает $u = u_j = \text{sh}^2(0,05 j)$.

§ 5. Точные решения задачи нелинейной фильтрации при нелинейных законах, отличных от закона фильтрации с предельным градиентом

1. Если исходная задача на плоскости годографа приводится к канонической *, краевой задаче в полуполосе без разреза, решение ее может быть получено не только с помощью интегрального преобразования по переменной w , но и путем разложения в ряд Фурье по θ . Решение разложением получается более громоздким, зато не требуется интегрального преобразования. Способом разложения Энгелунд [239] приближенно решил задачу о притоке к цепочке скважин при двучленном законе фильтрации; при помощи рядов обследовано асимптотическое поведение решений задач фильтрации с предельным градиентом и получены предельные решения [66]. В работах [135, 140] была проанализирована структура решения в рядах для уравнения общего вида (0.1) в полуполосе $0 \leq \theta \leq \theta_0$ при краевых условиях $\psi(w, 0) = 0$; $\psi(0, \theta) = 0$; $\psi(w, \theta_0) = 0$ ($0 \leq w \leq a$, $b \leq w < \infty$); $\psi(w, \theta_0) = Q$ ($a \leq w \leq b$) (физические задачи, которые приводятся к этой краевой задаче в плоскости годографа, указаны в § 4), решены задачи о притоке к цепочке скважин при кусочно-линейном законе фильтрации

$$\begin{aligned} \Phi(w) &= w/\varepsilon, \quad w \leq w_0, \quad \Phi(w) = w + \lambda, \quad w \geq w_0, \\ \varepsilon &= w_0/(w_0 + \lambda) \end{aligned} \quad (5.1)$$

и при обобщенном законе фильтрации с предельным градиентом

$$\Phi(w) = (w^\alpha + \lambda^\alpha)^{1/\alpha}, \quad \alpha > 0 \quad (5.2)$$

или

$$\Phi(w) = \lambda [(w/\lambda)^{1/\beta} + 1].$$

* Под «канонической» понимаем краевую задачу, для которой тип краевых условий не меняется на каждом из прямолинейных отрезков границы. Так, задача с условиями $\psi_\theta = 0$ ($\theta = 0$), $\psi = f(\theta)$ ($w = 0$), $\psi_\theta + \alpha\psi = f(w)$, $\alpha = \text{const}$ — каноническая, а задача с условиями $\psi = 0$, всюду, кроме $\theta = \theta_0$, $a \leq w \leq b$, $\psi_\theta = q$ ($\theta = \theta_0$, $a \leq w \leq b$), — неканоническая.

Указанные решения полезны при анализе свойств решений упруго-пластических задач, эквивалентных задачам нелинейной фильтрации в силу аналогии, указанной в § 1 гл. II. Такой анализ приведен в работах А. Е. Сегалова [188—190].

2. Для степенного закона фильтрации

$$\Phi(w) = w^k \quad (5.3)$$

круг задач, для которых может быть построено точное решение в плоскости годографа, значительно шире рассмотренного в § 4. Объясняется это тем, что в этом случае не только весьма просто решаются «канонические» краевые задачи в плоскости годографа, но и многие из «неканонических» задач удается свести к уравнению Винера — Хопфа, решаемому обычным методом. Ряд конкретных решений задач фильтрации при степенном законе сопротивления получен таким путем В. И. Ворониным и В. В. Самохваловым [36—38, 186]. Число решаемых таким образом задач можно существенно расширить. В частности, методами предыдущей главы элементарно решается задача об обтекании стенки с уступом, решенная численно в работе [232].

3. Если уравнение в плоскости годографа некоторой заменой переменных может быть преобразовано в уравнение Лапласа, как это имеет место в случае закона В. В. Соколовского и закона, предложенного С. В. Панько, к решению задачи в плоскости годографа применим весь аппарат теории аналитических функций, так что решение, в принципе, получается весьма просто. Не останавливаясь на этом более подробно, укажем лишь работы [12, 88, 165, 227], в которых рассматриваются такие решения.

Приближенные решения плоских задач фильтрации с предельным градиентом

В предыдущих главах были рассмотрены основные постановки задач фильтрации с предельным градиентом, их преобразование к плоскости годографа u, θ и задачи, допускающие точные решения. Возможность построения точного решения определялась типом области, в которой отыскивается решение в плоскости годографа, и характером граничных условий. В тех случаях, когда область имеет вид полосы с разрезом или несколькими разрезами или когда происходит смена типа граничного условия на сторонах полосы, построить точное решение не удастся. Однако в этом случае можно построить эффективное приближенное решение задачи. При этом имеются в виду решения, позволяющие построить застойные зоны и при необходимости поля течения. Наряду с этим можно, используя некоторые мажорантные свойства рассматриваемых решений, построить своего рода «шаблоны», позволяющие грубо, но быстро отыскивать размеры застойных зон, возникающих в той или иной задаче (так называемые предельные решения). Построение указанных приближенных и предельных решений составляет содержание настоящей главы. Изложение основано на работах [66, 68—70, 77].

§ 1. Формулировка основных задач

1. Большинство рассматриваемых задач после отображения на плоскость годографа u, θ приводят к следующим двум основным задачам:

Задача А. Найти решение $\psi(u, \theta)$ уравнения

$$u(u+1)\psi_{uu} + (u-1)\psi_u + \psi_{\theta\theta} = 0 \quad (1.1)$$

в полосе $\Pi \{0 \leq u < \infty; 0 \leq \theta \leq \theta_0\}$ с разрезом γ_A

$$\theta = \theta_1, 0 < \theta_1 < \theta_0; \quad 0 \leq u \leq a < \infty, \quad (1.2)$$

если на границе Γ_A области заданы значения $\psi(u, \theta)$.

Задача Б. Найти решение $\psi(u, \theta)$ уравнения (1.1) в полосе $\Pi \{0 \leq u < \infty; 0 \leq \theta \leq \theta_0\}$ с разрезом γ_B

$$\theta = \theta_1; \quad 0 < \theta_1 < \theta_0; \quad a \leq u < \infty \quad (1.3)$$

при заданных граничных значениях $\psi(u, \theta)$ на границе Γ_B .

Пусть граничные условия имеют вид

$$\psi(u, 0) = f_1(u); \quad \psi(u, \theta_0) = f_2(u); \quad \psi(0, \theta) = \varphi(\theta); \quad (1.4)$$

$$\psi(u, \theta_1 \pm 0) = f_{\pm}(u) \text{ (на разрезе)}. \quad (1.5)$$

Рассмотрим функцию $\psi_1(u, \theta)$, являющуюся решением уравнения (1.1) в полосе Π (без разреза) при краевых условиях (1.4).

В соответствии с гл. IV решение $\psi_1(u, \theta)$ легко может быть найдено (по крайней мере формально) в виде

$$\psi_1(u, \theta) = \frac{u^2}{2} \int_0^{\infty} s^3 (1 + s^2) F(s, -u) \operatorname{cth} \pi s \psi_1^*(s, \theta) ds. \quad (1.6)$$

Здесь $\psi_1^*(s, \theta)$ — решение уравнения

$$\frac{d^2 \psi_1^*}{d\theta^2} - s^2 \psi_1^* = -2\varphi(\theta) \quad (1.7)$$

при краевых условиях

$$\psi_1^*(s, 0) = f_1^*(s), \quad \psi_1^*(s, \theta_0) = f_2^*(s), \quad (1.8)$$

где

$$f_{1,2}^*(s) = \int_0^{\infty} (1 + u) F(s, -u) f_{1,2}(u) du. \quad (1.9)$$

Таким образом, функция $\psi_1(s, \theta)$ может считаться известной. Полагая теперь

$$\psi(u, \theta) = \Psi(u, \theta) + \psi_1(u, \theta), \quad (1.10)$$

видим, что функция $\Psi(u, \theta)$ является решением первой краевой задачи для уравнения (1.1) в полосе с разрезом при нулевых граничных условиях всюду, кроме разреза (γ_A или γ_B соответственно). Поэтому без ограничения общности можно рассматривать задачи A и B сразу при нулевых условиях на границах $\theta = 0$, $\theta = \theta_0$ и $u = 0$, т. е. полагая

$$f_1(u) = f_2(u) = \varphi(\theta) \equiv 0, \quad (1.11)$$

что и принимается в дальнейшем.

2. Рассмотрим задачу A с условиями (1.4), (1.5), (1.11). Обозначим через $\psi^*(s, \theta)$ трансформанту искомого решения (результат применения к нему интегрального преобразования (1.6) главы IV).

При $0 \leq \theta \leq \theta_1$ имеем с учетом граничных условий при $\theta = 0$ и $u = 0$

$$\psi^*(s, \theta) = A(s) \operatorname{sh} s \theta \quad (1.12)$$

и аналогично при $\theta_1 < \theta < \theta_0$

$$\psi^*(s, \theta) = B(s) \operatorname{sh} s (\theta_0 - \theta). \quad (1.13)$$

При $\theta = \theta_1$ имеем в силу (1.5) и (IV.1.6)

$$\begin{aligned} \psi^*(s, \theta_1 + 0) - \psi^*(s, \theta_1 - 0) &= \int_0^a (1+u) F(s, -u) \times \\ &\times [f_+(u) - f_-(u)] du = \sigma_1(s), \end{aligned} \quad (1.14)$$

откуда

$$\begin{aligned} B(s) &= [\sigma_1(s) + A(s) \operatorname{sh} s \theta_1] / \operatorname{sh} s \theta_2; \\ \theta_2 &= \theta_0 - \theta_1. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Для того, чтобы удовлетворить всем условиям задачи, осталось еще потребовать непрерывности производной $\partial\psi/\partial\theta$ при $\theta = \theta_1$, $u > a$ и выполнения условия $\psi(u, \theta_1 - 0) = f_-(u)$, $u < a$. С учетом формул (1.5) главы IV и (1.15) эти условия дают

$$\int_0^\infty \frac{s^3(1+s^2)}{\operatorname{th} \pi s} F(s, -u) C(s) ds = 0 \quad (a < u < \infty); \quad (1.16)$$

$$\int_0^\infty \frac{s^3(1+s^2)}{\operatorname{th} \pi s} F(s, -u) \frac{\operatorname{sh} s \theta_1 \operatorname{sh} s \theta_2}{\operatorname{sh} s \theta_0} C(s) ds = h_1(u) \quad (0 < u < a),$$

где

$$C(s) = s [A(s) \operatorname{sh} s \theta_0 + \sigma_1(s) \operatorname{ch} s \theta_2] / \operatorname{sh} s \theta_2; \quad (1.17)$$

$$h_1(u) = \frac{2f_-(u)}{u^2} + \int_0^\infty s^3(1+s^2) \frac{\operatorname{ch} s \theta_2 \operatorname{sh} s \theta_1}{\operatorname{sh} s \theta_0 \operatorname{th} \pi s} F(s, -u) \sigma_1(s) ds. \quad (1.18)$$

Таким образом, задача *A* сводится к решению парных уравнений (1.16) для определения $C(s)$.

Рассмотрим теперь задачу *B* при условиях

$$\psi(0, u) = \psi(u, 0) = \psi(u, \theta_0) = 0; \quad \psi(u, \theta_1 \pm 0) = g_\pm(u). \quad (1.19)$$

Аналогично предыдущему трансформанта $\psi^*(s, \theta)$ вновь может быть представлена в виде (1.12), (1.13), где $A(s)$ и $B(s)$ связаны соотношением (1.15) с заменой $\sigma_1(s)$ на

$$\sigma_2(s) = g_+^*(s) - g_-^*(s); \quad g_\pm^*(s) = \int_a^\infty (1+u) g_\pm(u) F(s, -u) du. \quad (1.20)$$

Удовлетворяя после этого условию непрерывности $\partial\psi/\partial\theta$ при $\theta = \theta_1$, $u < a$ и условию $\psi(u, \theta_1 - 0) = g_-(u)$, $u > a$, получим парные уравнения

$$\int_0^{\infty} s(1+s^2)C(s)\operatorname{cth}\pi s F(s, -u)ds = 0 \quad (a < u < \infty); \quad (1.21)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{s^2(1+s^2)\operatorname{sh}s\theta_1}{\operatorname{sh}s\theta_1\operatorname{sh}s\theta_2\operatorname{th}\pi s} C(s)F(s, -u)ds = h_2(u) \quad (0 \leq u < a);$$

$$C(s) = s^2[A(s)\operatorname{sh}s\theta_1 - g_-^*(s)]; \quad (1.22)$$

$$h_2(u) = \int_0^{\infty} \frac{s^4(1+s^2)}{\operatorname{th}\pi s} \left[\frac{\sigma_2(s)}{\operatorname{th}s\theta_2} + \frac{g_-^*(s)\operatorname{sh}s\theta_0}{\operatorname{sh}s\theta_1\operatorname{sh}s\theta_2} \right] F(s, -u)ds. \quad (1.23)$$

Парные уравнения (1.16) и (1.21) удобно проинтегрировать по u в пределах от u до ∞ . (Это связано со сравнительной простотой интегральных представлений функций $F_1(s, -u)$, возникающих при интегрировании. Имея в виду соотношение

$$\int_u^{\infty} F(s, -u)du = \frac{2}{1+s^2} F_1(s, -u), \quad (1.24)$$

следующее из формул дифференцирования гипергеометрических функций [21, 115], получим уравнения: для задачи А

$$\int_0^{\infty} s^3 \operatorname{cth}\pi s F_1(s, -u)C(s)ds = 0 \quad (a < u < \infty); \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} s^2 \frac{\operatorname{sh}s\theta_1\operatorname{sh}s\theta_2}{\operatorname{th}\pi s\operatorname{sh}s\theta_0} F_1(s, -u)C(s)ds = \\ &= \int_0^{\infty} s^3 \frac{\operatorname{ch}s\theta_2\operatorname{sh}s\theta_1}{\operatorname{sh}s\theta_0\operatorname{th}\pi s} F_1(s, -u)\varpi(s)ds - \\ & - \int f_-(u) \frac{du}{u^2} \equiv H_1(u) + r_1 \quad (0 < u < a) \end{aligned}$$

и для задачи В

$$\int_0^{\infty} s \operatorname{cth}\pi s F_1(s, -u)C(s)ds = 0 \quad (a < u < \infty); \quad (1.26)$$

$$\int_0^{\infty} s^2 \operatorname{cth} \pi s C(s) F_1(s, -u) \frac{\operatorname{sh} s \theta_0}{\operatorname{sh} s \theta_1 \operatorname{sh} s \theta_2} ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int h_2(u) \frac{du}{u^2} \equiv H_2(u) + r_2 \quad (0 < u < a).$$

Возникающие при интегрировании постоянные r_1 и r_2 определяют впоследствии, исходя из требований на решения.

3. Парные уравнения (1.25) и (1.26) имеют много общего с рассматривавшимися ранее классами парных уравнений [198, 206, 274] и особенно [182], отличаясь от них типом ядер. Обычными в теории парных уравнений приемами они могут быть сведены к уравнению Фредгольма II рода, а в отдельных случаях — решены явно.

Надо сказать, что способы решения парных уравнений обычно излагаются так, что зачастую решение представляется скорее угаданным, чем найденным регулярными приемами. Чтобы в какой-то мере восполнить этот недостаток, попытаемся изложить логику решения парных уравнений на примере задачи А. Прежде всего заметим, что первое уравнение (1.16) можно записать в виде

$$\int_0^{\infty} \frac{s^3(1+s^2)}{\operatorname{th} \pi s} F(s, -u) C(s) ds = \begin{cases} 0 & a < u < \infty, \\ f(u) & 0 < u < a, \end{cases} \quad (1.27)$$

где $f(u)$ — неизвестная функция. Обращая это соотношение в соответствии с формулой (1.6) главы IV, получим *

$$C(s) = 2 \int_0^a \frac{f(u)(1+u)}{u^2} F(s, -u) du. \quad (1.28)$$

Далее, $F(s, -u)$, как четная целая аналитическая функция s , имеет представление

$$F(s, -u) = \int_0^{\beta(u)} \rho(u, \tau) \cos s \tau d\tau; \quad \beta'(u) \geq 0.$$

Подставляя это выражение в (1.28), получим

$$C(s) = 2 \int_0^a \frac{f(u)(1+u)}{u^2} \int_0^{\beta(u)} \rho(u, \tau) \cos s \tau d\tau du =$$

$$= 2 \int_0^a \cos s \tau \int_{u(\tau)}^a \frac{f(u)(1+u)}{u^2} \rho(u, \tau) du d\tau \equiv$$

$$\equiv \int_0^a \varphi(\tau) \cos s \tau d\tau = \frac{1}{s} \int_0^a \varphi(\tau) \sin s \tau d\tau; \quad \alpha = \beta(a). \quad (1.29)$$

* Поскольку здесь речь идет об изложении наводящих соображений, мы считаем все необходимые действия возможными.

Таким образом, $C(s)$ имеет представление (1.29), причем функция $\varphi(\tau)$ может, вообще говоря, иметь особенности на отрезке $[0, a]$. В рассматриваемом частном случае функция $f(u)$, трансформантой которой является $C(s)$, — это, очевидно, скачок нормальной производной по обе стороны разреза; как обычно, в точке a эта функция имеет особенность вида $c/\sqrt{a-u}$ и является гладкой при $u < a$. Используя это и конкретный вид представления для $F(s, -u)$, можно установить, что $\varphi(\tau)$ может иметь особенность (причем известного вида) только в точке $\tau = a$. Тем самым мы нашли «общее решение» первого уравнения (1.16) (или 1.25). Теперь из второго уравнения остается найти $\varphi(\tau)$.

Подставляя (1.29) во второе уравнение (1.25), получим

$$\int_0^a \varphi(\tau) \int_0^\infty s \frac{\operatorname{sh} s\theta_1 \operatorname{sh} s\theta_2}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} F_1(s, -u) \sin s\tau \, ds \, d\tau = H_1(u) + r_1; \quad 0 < u < a, \quad (1.30)$$

причем в рассматриваемом случае $a = \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2}$.

Заметим теперь, что интегральное представление для $F_1(s, -u)$ можно разрешить относительно $\sin \eta s$, получив

$$\sin \eta s = \frac{2s}{\operatorname{sh} \frac{\eta}{2}} \frac{d}{d\eta} \int_0^{\operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2}} \frac{u F_1(s, -u) \, du}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2} - u}} \equiv A_\eta(s F_1(s, -u)),$$

где через A_η обозначен соответствующий интегральный оператор, причем наличие формулы подобного рода определяется не спецификой данного семейства функций, а по-прежнему лишь их аналитической природой. Применяя оператор A_β к обеим частям равенства (1.30), получим

$$\begin{aligned} \int_0^a \varphi(\tau) \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} s\theta_1 \operatorname{sh} s\theta_2}{\operatorname{sh} s\theta_0 \operatorname{th} \pi s} \sin s\tau \sin s\beta \, ds \, d\tau = \\ = \frac{2}{\operatorname{sh} \frac{\beta}{2}} \frac{d}{d\beta} \int_0^{\operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2}} \frac{u (H_1(u) + r_1)}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} - u}} \, du. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Воспользуемся теперь тем, что (формально)

$$\int_0^\infty \sin s\tau \sin s\beta \, ds = \frac{2}{\pi} \delta(\beta - \tau), \quad (1.32)$$

где δ — дельта-функция.

Тогда, очевидно, левая часть (1.31) равна

$$\frac{1}{\pi} \varphi(\beta) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha} \varphi(\tau) K(\tau, \beta) d\tau,$$

где ядро

$$K(\tau, \beta) = \int_0^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sh} s \theta_1 \operatorname{sh} s \theta_2}{\operatorname{sh} s \theta_0 \operatorname{th} \pi s} - \frac{1}{2} \right) \sin s \tau \sin s \beta ds \quad (1.33)$$

симметрично и аналитично по обоим аргументам.

В результате уравнение (1.31) превращается в уравнение Фредгольма II рода и может быть решено обычным образом.

Приведенные рассуждения, конечно, не являются строгими, однако они показывают, что, по существу, на первом этапе парные уравнения преобразуются в сингулярное интегральное уравнение в «скрытом» виде, которое затем либо решается явно, либо, как в данном случае, регуляризуется и сводится к уравнению Фредгольма. Подобная же ситуация просматривается и для других парных уравнений [198, 274, 182].

Получим теперь строго уравнение Фредгольма для вспомогательной функции $\varphi(\tau)$. Положим

$$\frac{2 \operatorname{sh} s \theta_1 \operatorname{sh} s \theta_2}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s \theta_0} = 1 + \varepsilon_1(s); \quad E_1(v) = \int_0^{\infty} \varepsilon_1(s) \cos sv ds \quad (1.34)$$

и подставим во второе уравнение (1.25) представление (1.29) для $C(s)$, представление (2.18) главы IV для $F_1(s, -u)$ и (1.34). Получим при этом

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi u} \int_0^{\infty} (1 + \varepsilon_1(s)) \int_0^{\beta} \frac{\sin \eta s \operatorname{sh} \frac{\eta}{2} d\eta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2}}} \times \\ & \times \int_0^{\alpha} \varphi(\tau) \sin \tau s d\tau ds = H_1(u) + r_1. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Легко убедиться, что произведение

$$(1 + \varepsilon_1(s)) \int_0^{\alpha} \varphi(\tau) \sin \tau s d\tau$$

представляет собой синус-преобразование функции

$$X(\tau) = \varphi(\tau) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha} \varphi(v) [E_1(\tau - v) - E_1(\tau + v)] dv. \quad (1.36)$$

Учитывая, что второй множитель в подынтегральном выражении (1.35) представляет собой синус-преобразование функции, равной

$$\frac{\operatorname{sh} \frac{\eta}{2}}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2}}}, \quad \eta < \beta$$

и нулю при $\beta < \eta$, и применяя теорему о свертке для синус-преобразований [198], получим из (1.35)

$$\int_0^{\beta} X(\tau) \frac{\operatorname{sh} \frac{\tau}{2} d\tau}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\tau}{2}}} = 4u(H_1(u) + r_1). \quad (1.37)$$

Подстановкой $\operatorname{ch} \frac{\tau}{2} = \xi$ уравнение (1.37) преобразуется в интегральное уравнение Абеля, решая которое получим

$$X(\tau) = \frac{4}{\tau \operatorname{sh} \frac{\tau}{2}} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\operatorname{sh}^2 \frac{\tau}{2}} \frac{u H_1(u) + ur_1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\tau}{2} - u}} du. \quad (1.38)$$

Таким образом, функция $X(\tau)$ оказывается выраженной через известную функцию $H_1(u)$ и постоянную r_1 . При этом (1.36) превращается в интегральное уравнение Фредгольма II рода для определения $\varphi(\tau)$. Из него можно найти $\varphi(\tau)$, причем найденное выражение будет содержать (линейно) неизвестную постоянную r_1 . Тем самым определены (опять с точностью до слагаемого, линейно зависящего от r_1) функция $C(s)$, а потому и $A(s)$ и $B(s)$, через которые выражается решение $\psi(u, \theta)$. Таким образом, решение задачи найдено с точностью до слагаемого, содержащего множителем постоянную r_1 . К вопросу о выборе этого множителя мы вернемся позднее.

4. Перейдем теперь к задаче Б. Решение парных интегральных уравнений (1.26) вновь будем искать в виде (1.29). При этом, однако, благодаря более низкой степени s в подынтегральном выражении в левой части первого уравнения (1.26), возникнет особенность при $s = 0$, если только $C(0) \neq 0$. Поэтому, чтобы тождественно удовлетворить этому уравнению, следует потребовать $C(0) = 0$ или

$$\int_0^{\alpha} \tau \varphi(\tau) d\tau = 0. \quad (1.39)$$

После подстановки (1.29) во второе уравнение (1.26), действуя так же, как и в случае задачи А, получаем для $\varphi(\tau)$ интегральное

уравнение Фредгольма II рода вида

$$\varphi(\tau) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha} E_2(\tau, \nu) \varphi(\nu) d\nu = X(\tau), \quad (1.40)$$

где

$$E_2(\tau, \nu) = 2 \int_0^{\infty} \varepsilon_2(s) \sin s\tau \sin s\nu ds; \quad (1.41)$$

$$\varepsilon_2(s) = \frac{\operatorname{cth} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0}{2 \operatorname{sh} s\theta_1 \operatorname{sh} s\theta_2} - 1; \quad (1.42)$$

$$X(\tau) = \frac{1}{\pi \operatorname{sh} \frac{\tau}{2}} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\operatorname{sh}^2 \tau/2} \frac{u H_2(u) + u r_2}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\tau}{2} - u}} du. \quad (1.43)$$

Таким образом, и в этом случае задача приводится к интегральному уравнению Фредгольма (1.40), содержащему в правой части неизвестную постоянную r_2 , определяемую из дополнительного условия (1.39).

§ 2. Приложения. Задача А

1. Применим полученные в предыдущем параграфе результаты к отысканию застойных зон для задач фильтрации с предельным градиентом, приводящих к задаче А. Как показано в главе III, течение, создаваемое круговой батареей из n скважин (источников равной интенсивности $q = 2Q$, расположенных в вершинах правильного n -угольника, рис. 3.4), приводит к задаче определения $\psi(u, \theta)$ как решения уравнения (1.1) в полосе $\Pi\{0 \leq \theta \leq \theta_0, 0 \leq u < \infty$ с разрезом $\gamma_A\{0 < \theta < \theta_1 < \theta_0, 0 \leq u \leq a\}$ при условиях

$$\begin{aligned} \psi(u, 0) &= 0, & \psi(0, \theta) &= 0 & (0 \leq \theta \leq \theta_1), \\ \psi(u, \theta_1) &= 0 & & & (0 \leq u \leq a), \\ \psi(0, \theta) &= Q \frac{\theta - \theta_1}{\theta_2} & & & (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_0 = \theta_1 + \theta_2), \\ \psi(u, \theta_0) &= Q. \end{aligned} \quad (2.1)$$

При этом

$$\theta_0 = \pi, \quad \theta_1 = \pi(n-1)/n. \quad (2.2)$$

Определим решение задачи $\psi_1(u, \theta)$ без учета условий на разрезе γ_A . Имеем для трансформанты решение

$$\psi_1^*(s, \theta) = A(s) \operatorname{sh} s\theta \quad (0 \leq \theta \leq \theta_1). \quad (2.3)$$

При $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_0$ для трансформанты получаем уравнение

$$\frac{d^2 \psi_1^*}{d\theta^2} - s^2 \psi_1^* = - \frac{2Q(\theta - \theta_1)}{\theta_2}, \quad (2.4)$$

откуда

$$\psi_1^*(s, \theta) = B(s) \operatorname{sh} s(\theta - \theta_0) + \frac{2Q(\theta - \theta_1)}{\theta_2 s^2}. \quad (2.5)$$

Из условий непрерывности функции $\psi_1^*(s, \theta)$ и производной $\partial\psi_1^*/\partial\theta$ при $\theta = \theta_1$ получаем для $A(s)$ и $B(s)$ уравнения

$$\begin{aligned} A(s) \operatorname{sh} s\theta_1 &= -B(s) \operatorname{sh} s\theta_2; \\ sA(s) \operatorname{ch} s\theta_1 &= sB(s) \operatorname{ch} s\theta_2 + \frac{2Q}{\theta_2 s^2}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

откуда

$$A(s) = \frac{2Q}{\theta_2 s^3} \operatorname{sh} s\theta_2; \quad B(s) = -\frac{2Q}{\theta_2 s^3} \operatorname{sh} s\theta_1. \quad (2.7)$$

Поэтому в соответствии с формулой обращения (1.6) главы IV при $0 \leq \theta \leq \theta_1$ решение $\psi_1(u, \theta)$ имеет вид

$$\psi_1(u, \theta) = \frac{Qu^2}{\theta_2} \int_0^\infty \frac{1+s^2}{\operatorname{th} \pi s} \frac{\operatorname{sh} s\theta \operatorname{sh} s\theta_2}{\operatorname{sh} s\theta_0} F(s, -u) ds, \quad (2.8)$$

а при $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_0$

$$\begin{aligned} \psi_1(u, \theta) &= \frac{Q(\theta - \theta_1)}{\theta_2} - \frac{Qu^2}{\theta_2} \int_0^\infty \frac{1+s^2}{\operatorname{th} \pi s} \times \\ &\times \frac{\operatorname{sh} s(\theta - \theta_0) \operatorname{sh} s\theta_1}{\operatorname{sh} s\theta_0} F(s, -u) ds. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Таким образом, в данном случае во вспомогательной задаче A с нулевыми условиями на границах полосы

$$f_-(u) = f_+(u) = -\psi_1(u, \theta_1) \quad (u \leq a), \quad \sigma_1(s) = 0. \quad (2.10)$$

Далее, в соответствии с (1.18), (2.8) и (1.25)

$$\begin{aligned} H_1(u) &= -\frac{2Q}{\theta_2} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} s\theta_1 \operatorname{sh} s\theta_2}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} F_1(s, -u) ds \equiv \\ &\equiv -\frac{Q}{\theta_2} \int_0^\infty [1 + \varepsilon_1(s)] F_1(s, -u) ds, \end{aligned} \quad (2.11)$$

Подставляя это выражение в формулу (1.38), заменяя функцию $F_1(s, -u)$ ее интегральным представлением (2.18) главы IV и выполняя интегрирование по u , получим

$$X_1(\tau) = -\frac{2Q}{\theta_2} \left[1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varepsilon_1(s) \frac{\sin s\tau}{s} ds \right] + \frac{4}{\pi} r_1 \operatorname{sh} \tau. \quad (2.12)$$

В силу экспоненциального стремления $\varepsilon_1(s)$ к нулю при $s \rightarrow \infty$ интеграл в (2.12) представляет собой целую аналитическую функцию τ , разлагающуюся в ряд по нечетным степеням τ . Поэтому при любом r_1 функция $X_1(\tau)$ представляет собой целую аналитическую функцию τ , равную $-2Q/\theta_2$ при $\tau = 0$ и разлагающуюся в ряд, не содержащий четных степеней τ , начиная со второй.

Далее, в соответствии с (1.34) ядро $E(\tau, \nu)$ уравнения (1.36) разлагается в ряд вида

$$E(\tau, \nu) = 2\tau\nu E_{11} - \frac{1}{3}\tau\nu(\tau^2 + \nu^2)E_{12} + \dots, \quad (2.13)$$

где

$$E_{1k} = \int_0^\infty s^{2k} \varepsilon_1(s) ds. \quad (2.14)$$

Ряд (2.13) равномерно сходится при любых конечных τ и ν и может быть в принципе использован для сведения уравнения (1.36) к уравнению с вырожденным ядром. Из (2.12) и (2.13) следует, что при любом r_1 решение $\varphi(\tau)$ представляется в виде

$$\varphi(\tau) = -\frac{2Q}{\theta_2} + \varphi_1(\tau), \quad (2.15)$$

где $\varphi_1(\tau)$ разлагается в ряд по нечетным степеням τ .

Решение исходной задачи при $0 \leq \theta \leq \theta_1$ дается выражением

$$\begin{aligned} \psi(u, \theta) = \Psi(u, \theta) + \psi_1(u, \theta) = \frac{1}{2}u^2 \int_0^\infty \left[s^2 C(s) + \frac{2Q}{\theta_2} \right] \times \\ \times (1 + s^2) \frac{\operatorname{sh} s\theta \operatorname{sh} s\theta_2}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} F(s, -u) ds, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $C(s)$ определено формулой (1.29).

При $u < a$, $\theta = \theta_1$ имеем $\psi(u, \theta_1) = 0$, а производная $\partial\psi/\partial\theta$ должна быть интегрируемой функцией u . Можно показать, что из требования интегрируемости $\partial\psi/\partial\theta$ следует условие

$$\varphi(a) = 0, \quad (2.17)$$

служащее для определения постоянной r_1 . Тем самым функция $\varphi(\tau)$ в принципе определяется полностью.

Образом граничной кривой застойной зоны является, как уже говорилось, линия

$$z(\theta) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\theta \chi(\theta) e^{i\theta} d\theta + z_0; \quad \chi(\theta) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} \frac{\partial\psi}{\partial u}. \quad (2.18)$$

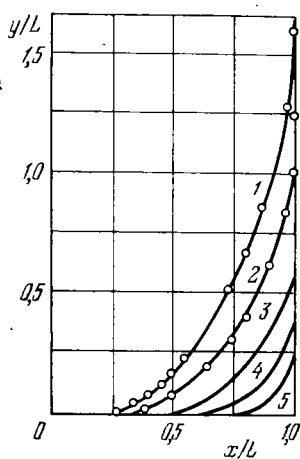


Рис. 5.1

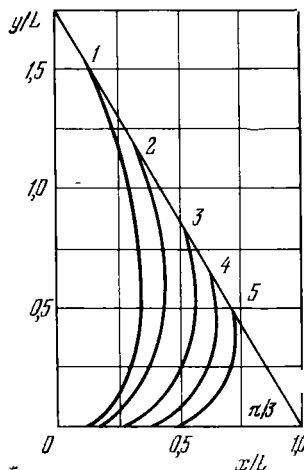


Рис. 5.2

Подставляя сюда выражение (2.16), получим

$$\begin{aligned} \lambda z(\theta) &= e^{i\theta} \int_0^{\infty} \frac{s \operatorname{ch} s\theta - i \operatorname{sh} s\theta}{\operatorname{ch} s\theta_0} \frac{\operatorname{sh} s\theta_2}{\operatorname{th} \pi s} \left[s^2 C(s) + \frac{2Q}{\theta_2} \right] F(s, -u) ds \equiv \\ &\equiv e^{i\theta} \int_0^{\infty} \frac{s \operatorname{ch} s\theta - i \operatorname{sh} s\theta}{s \operatorname{ch} s\theta_0} \times \\ &\times \frac{\operatorname{sh} s\theta_2}{\operatorname{th} \pi s} \left(\varphi'(\alpha) \sin \alpha s - \int_0^{\alpha} \varphi''(\tau) \sin \tau \tau d\tau \right) ds. \end{aligned} \quad (2.19)$$

2. Описанный выше способ сведения задачи А к интегральному уравнению Фредгольма II рода был использован для построения застойных зон в нескольких задачах. Рассматривалась задача о кольцевой батарее n скважин, сформулированная выше (границы

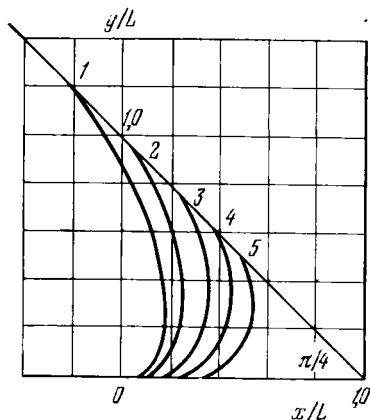


Рис. 5.3

Рис. 5.4

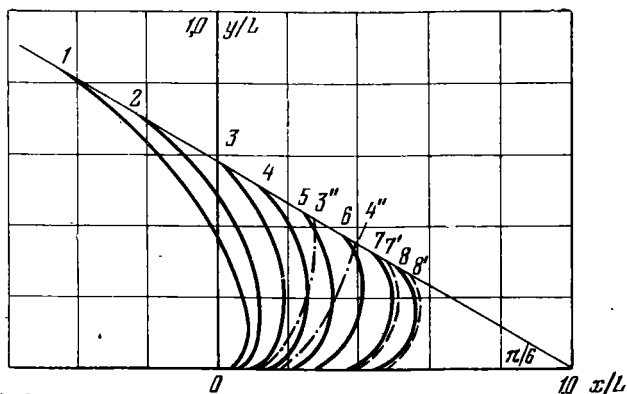


Рис. 5.5

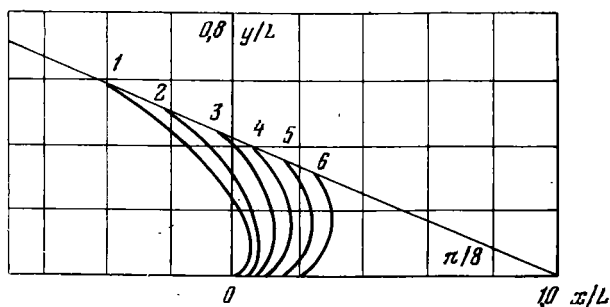
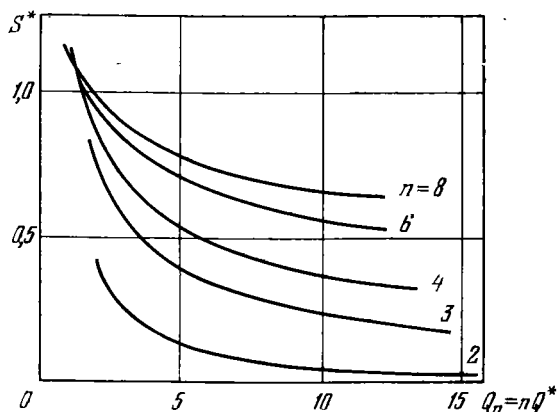


Рис. 5.6



чные условия (2.1), (2.2)), при $n = 2, 3, 4, 6, 8$ и при различных значениях параметра в плоскости годографа a . На рис. 5.1—5.5 показаны соответствующие семейства решений (граница застойной зоны для элемента симметрии течения), причем за масштаб длин

Таблица 5.1

№ рис.	№ кривой	1	2	3	4	5	6	7	8
	$n=\pi; \theta_0^a$	0,05	0,1	0,25	0,5	1	2	5	10
5.1	2	1,0	1,51	2,70	4,27	7,72	—	—	—
5.2	3	0,60	0,90	1,66	2,76	4,82	—	—	—
5.3	4	0,38	0,59	1,10	1,86	3,30	—	—	—
5.4	6	0,20	0,31	0,61	1,06	1,95	3,84	8,32	17,9
5.5	8	0,125	0,20	0,406	0,72	1,34	2,67	—	—
5.7		0,049	0,053	0,206	0,57	1,55	—	—	—
5.8		0,052	0,142	0,51	0,23	2,79	—	—	—

принят радиус батареи L (половина расстояния между противоположными источниками). Вспомогательные графики рис. 5.6 и табл. 5.1 связывают величины основного безразмерного параметра задачи в физической плоскости $Q^* = Q/\lambda L$ и относительной площади полной застойной зоны $S^* = S/\pi L^2$ и основного безразмерного параметра задачи в плоскости годографа a для решений рис. 5.1—5.5. При построении решений интегральное уравнение решалось численно с контролируемой точностью, затем найденная функция $\varphi(\tau)$, представленная несколькими членами ее разложения в ряд Фурье, подставлялась в формулу (2.19) для определения координат застойной зоны.

Расчеты показывают, что решение интегрального уравнения и построение граничной зоны осуществляется быстро и с высокой точностью (не менее 1%) при значениях a вплоть до нескольких единиц, причем точность решения тем выше, чем меньше значение a .

3. Получим теперь приближенное решение задачи при малых a .

Из интегрального уравнения (1.35) имеем, используя (2.12), (2.13) и (2.17), выражение

$$\varphi(\tau) = \frac{2Q}{\theta_2} \left[-1 + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{6} - \frac{E}{3\pi} \alpha^2 \right) \tau + \tau \left(\frac{1}{6\alpha} + \frac{E}{3\pi} \right) \right];$$

$$E = E_{11} + E_{12}, \quad (2.20)$$

подставляя которое в (2.19), получим

$$\lambda z(\theta) = \frac{2Q}{\theta_2} \int_0^\infty \frac{e^{i\theta}(s \operatorname{ch} s\theta - i \operatorname{sh} s\theta)}{\operatorname{sh} s\theta_0} \cdot \frac{\operatorname{sh} s\theta_2}{\operatorname{th} \pi s} \times$$

$$\times \left[\frac{\sin \alpha s}{s} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{3} + \frac{2\alpha^3 E}{3\pi} + O(\alpha^3) - \right. \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2E}{\pi} \right) \int_0^\alpha \frac{\tau \sin s\tau}{s} d\tau \right] ds. \quad (2.21)$$

Множитель перед квадратной скобкой в (2.21) при $s \rightarrow \infty$ ведет себя как $(s-1)e^{i\theta}e^{s(\theta-\theta_1)}/2$. Поэтому для малых α имеем

$$\begin{aligned} \lambda z(\theta) = & \frac{2Q}{\theta_2} e^{i\theta} \left[\int_0^\infty \left(\frac{s \operatorname{ch} s\theta \operatorname{sh} s\theta_2}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} - \frac{1}{2} s e^{s(\theta-\theta_1)} \right) ds + \right. \\ & + \frac{1 + \frac{\alpha^2}{3} + \frac{2\alpha^3 E}{3\pi}}{2(\alpha^2 + \xi^2)} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha E}{\pi} \right) \left(1 - \frac{\xi}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\xi} \right) - \\ & - i \left\{ \left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{\alpha}{6} \right) \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\xi} - \frac{1}{4\alpha} \left[(\alpha^2 + \xi^2) \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\xi} - \alpha \xi \right] + \right. \\ & \left. \left. + \int_0^\infty \left(\frac{\operatorname{sh} s\theta \operatorname{sh} s\theta_2}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} - \frac{1}{2} e^{-s\xi} \right) ds \right\} \right] \quad (\xi = \theta_1 - \theta). \quad (2.22) \end{aligned}$$

Чтобы определить положение застойной зоны, необходимо вычислить еще величину z_0 . Имеем

$$\begin{aligned} \lambda z_0 = & \int_0^\infty \frac{1}{u^2} \frac{\partial \psi(u, 0)}{\partial \theta} du = \int_0^\infty \frac{s \operatorname{sh} s\theta_2}{\operatorname{sh} s\theta_0 \operatorname{th} \pi s} \int_0^\alpha \varphi'(\tau) \cos s\tau d\tau ds = \\ = & \frac{2Q}{\theta_2} \left[\int_0^\infty \frac{s \operatorname{sh} s\theta_2}{\operatorname{sh} s\theta_0} \operatorname{cth} \pi s ds + O(\alpha^2) \right]. \quad (2.23) \end{aligned}$$

В качестве примера рассмотрим течение, создаваемое парой равнодебитных источников (с дебитом $q = 2Q$). В этом случае $\theta = 2\theta_1 = \pi$. Имеем при этом $E_{12} = 3E_{11} = -1/\pi$; $E = -4/3\pi$;

$$\begin{aligned} \lambda z(\theta) = & \frac{Q}{\pi} e^{i\theta} \left\{ \frac{1}{\cos^3 \theta} + \frac{2}{\pi \cos \theta} + \frac{2\theta \sin \theta}{\pi \cos^2 \theta} - \frac{8}{(\pi - 2\theta)^2} + \right. \\ & + \frac{2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{3} - \frac{8\alpha^3}{9\pi^2} \right)}{\alpha^2 + \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)^2} + \left(1 - \frac{8\alpha}{3\pi^2} \right) \left(\frac{\pi - 2\theta}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{2\alpha}{\pi - 2\theta} - 2 \right) - \\ & - i \left[\left(\frac{2}{\alpha} - \frac{\alpha}{3} - \left(\frac{\pi - 2\theta}{4\alpha} \right)^2 \right) \operatorname{arctg} \frac{2\alpha}{\pi - 2\theta} + \frac{\pi}{2} - \right. \\ & \left. - \theta + \operatorname{tg} \theta + \frac{2\theta}{\pi \cos \theta} - \frac{4}{\pi - 2\theta} \right] \} + \lambda z_0; \quad (2.24) \end{aligned}$$

$$\lambda z_0 = \frac{4Q}{\pi} \int_0^\infty \frac{s \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} s \operatorname{ch} \pi s}{\operatorname{sh}^2 \pi s} ds = \frac{2 + \pi}{\pi^2} Q = 0,521 Q. \quad (2.25)$$

Для вершины застойной зоны ($\theta = \pi/2$) имеем

$$\lambda z(\pi/2) = \frac{Q}{\alpha} - \frac{2Q}{\pi^2} - \frac{Q\alpha}{6} + i \frac{Q}{\pi} \left(\frac{2}{\alpha^3} - \frac{7}{6} + \frac{32\alpha}{9\pi^2} \right). \quad (2.26)$$

На рис. 5.1 точками показаны границы застойных зон для различных значений α .

Уравнение границы застойной зоны можно приближенно представить в виде

$$\left(\frac{L-x}{L-x(0)}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{y(\pi/2)}\right)^{2/3} = 1, \quad (2.27)$$

где $L = x(\pi/2)$ и $y(\pi/2)$ даются выражением (2.26). При этом граница застойной зоны представляет собой вытянутую вдоль оси y астроиду, и полная площадь застойной зоны составляет

$$S = \frac{3\pi}{16} [L - x(0)] y(\pi/2) \approx \frac{3\lambda L^3}{8Q} \left(1 + \frac{2Q}{\pi\lambda L}\right)^2 \left(1 - \frac{\pi+2}{\pi\lambda L} Q\right). \quad (2.28)$$

Аналогичным образом строятся приближенные решения задачи А и при других значениях числа скважин n .

4. Задача В.

Рассмотрим теперь несколько случаев, относящихся по введенной в § 1 классификации к задаче В. Один из наиболее важных случаев — это течение, создаваемое n источниками равной интенсивности $q = 2Q$, расположенными в вершинах правильного n -угольника, и стоком интенсивности $2nQ$, расположенным в его центре. Как показывают примеры, приведенные в гл. III (см. рис. 3.5), в плоскости годографа данной задаче отвечает задача В с параметрами

$$\theta_0 = \pi(n+1)/n; \quad \theta_1 = \pi; \quad \theta_2 = \pi/n \quad (2.29)$$

при нулевых граничных условиях на «внешних» границах

$$f_1(u) = f_2(u) = \varphi(\theta) = 0 \quad (2.30)$$

и постоянном значении функции тока на разрезе γ_B

$$\psi = f_-(u) = f_+(u) = Q \quad (\theta = \theta_1, \quad a \leq u < \infty). \quad (2.31)$$

Если плоскость покрыта сеткой правильных n -угольников, в вершинах которых расположены источники, а в центрах — стоки интенсивности q (где $n = 4$ для пятиточечной системы расстановки скважин, $n = 6$ для семиточечной системы расстановки), то также возникает задача В (см. рис. 3.6) с параметрами

$$\theta_0 = 2\pi/n; \quad \theta_1 = \theta_2 = \pi/n; \quad (2.32)$$

$$f_1(u) = f_2(u) = \varphi(\theta) = 0; \quad f_-(u) = f_+(u) = q/2 = Q. \quad (2.33)$$

Некоторые другие примеры будут рассмотрены ниже.

Проанализируем теперь подробнее случай задачи В, определяемой условиями (2.30), (2.31). В этом случае из (1.20) получаем

$$g_+^*(s) = g_-^*(s) = \frac{2Q}{s^2} F_0(s, -a); \quad \mathfrak{s}_2 = 0 \quad (2.34)$$

и согласно (1.23), (1.24) и (1.20)

$$H_2(u) = -2Q \int_0^{\infty} \frac{s^2 \operatorname{sh} s \theta_0 F_1(s, -u) F_0(s, -a)}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s \theta_1 \operatorname{sh} s \theta_2} ds. \quad (2.35)$$

Для функции $F_0(s, -a)$ имеем согласно формуле (2.21) главы IV

$$F_0(s, -a) = \frac{1}{\pi s} \int_0^{\alpha} \frac{\operatorname{sh} \frac{\tau}{2} \left(\operatorname{ch} \tau - \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2} \right) \sin s \tau}{\operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2} \left(\operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\tau}{2} \right)^{1/2}} d\tau; \quad a = \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (2.36)$$

Как уже говорилось в § 1, решение задачи ищем в виде (1.29), где $\varphi(\tau)$ удовлетворяет уравнению (1.40) при условии (1.39) для выбора постоянной r_2 , входящей в выражение (1.43) для правой части $X_2(\tau)$. Учитывая (2.35) и (2.36), находим, что $\varphi(\tau)$ представляется в виде

$$\varphi(\tau) = -\frac{2Q}{\pi} \frac{\operatorname{sh} \frac{\tau}{2} \left(\operatorname{ch} \tau - \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2} \right)}{a \left(\operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\tau}{2} \right)^{1/2}} + r_2 \zeta(\tau). \quad (2.37)$$

Здесь $\zeta(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\zeta(\tau) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha} \zeta(v) E_2(\tau, v) dv = \frac{1}{\pi} \operatorname{sh} \tau, \quad (2.38)$$

где ядро E_2 определено формулой (1.44). В силу соотношений (2.38) и (1.41) $\zeta(\tau)$ разлагается в ряд по нечетным степеням τ .

5. Используя выражения (1.6), (1.12), (1.22), (1.36), (2.36) и (2.37), представим решение $\psi(u, \theta)$ при $0 \leq \theta \leq \theta_1$ в виде

$$\begin{aligned} \psi(u, \theta) &= \frac{u^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{s(1+s^2) \operatorname{sh} s \theta}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s \theta_1} \left[\frac{1}{s} \int_0^{\alpha} \varphi(\tau) \sin s \tau d\tau + \right. \\ &\quad \left. + 2Q F_0(s, -a) \right] F(s, -u) ds = \\ &= \frac{r_2 u^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{(1+s^2) \operatorname{sh} s \theta}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s \theta_1} F(s, -u) \int_0^{\alpha} \zeta(\tau) \sin s \tau d\tau ds. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Координаты границы застойной зоны даются при этом выражениями, следующими из (2.39) и (2.18),

$$\lambda z_0 = r_2 \int_0^{\infty} s \frac{\operatorname{cth} \pi s}{\operatorname{sh} s \theta_1} \int_0^{\alpha} \zeta(\tau) \sin s \tau d\tau ds; \quad (2.40)$$

$$\lambda z(\theta) = r_2 e^{i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - i \right) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} s \theta \operatorname{cth} \pi s}{\operatorname{sh} s \theta_1} \int_0^{\alpha} \zeta(\tau) \sin s \tau d\tau ds. \quad (2.41)$$

Отметим, что задача в принятой постановке обладает очевидной симметрией, так что решение задачи и координаты застойной зоны в области $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_0$ можно получить из выражений (2.39) и (2.40), заменяя θ на $\theta_0 - \theta$, а θ_1 на θ_2 и обратно.

При малых a имеем отсюда, определяя $\zeta(\tau)$ из уравнения (2.38) и постоянную r_2 из условия (1.39),

$$\lambda z_0 = 2Q \left(\int_0^\infty \frac{s^2 \operatorname{cth} \pi s}{\operatorname{sh} s \theta_1} ds + O(a) \right); \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \lambda z(\theta) \approx & - \left\{ 2Q e^{i\theta} \left(i - \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \int_0^\infty s \left(\frac{\operatorname{sh} s \theta \operatorname{cth} \pi s}{\operatorname{sh} s \theta_1} - e^{-s\zeta} \right) ds - \right. \\ & - i e^{i\theta} \frac{6Q}{\alpha^3} \left(1 - \frac{\alpha^2}{10} \right) \left[\alpha - \frac{\alpha \xi^2}{6} + \frac{\alpha^3}{18} - \xi \left(1 - \frac{\xi^2}{6} \right) \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\xi} \right] + \\ & + e^{i\theta} \frac{6Q}{\alpha^3} \left(1 - \frac{\alpha^2}{10} \right) \left[\frac{\alpha \xi}{2} - \frac{\xi \operatorname{sh} \alpha}{\xi^2 + \alpha^2} + \left(1 - \frac{\xi^2}{2} \right) \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\xi} \right] \Big\}, \\ & \xi = \theta_1 - \theta; \end{aligned} \quad (2.43)$$

Наряду с определением границы застойной зоны для движений, приводящих к задаче *B*, важно знать также перепад приведенного напора H между источниками и стоками (рассматриваемыми при этом уже как скважины малого, но конечного радиуса).

Приведенный напор как функция от u , θ может быть определен интегрированием уравнений

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{1+u}{u^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} = - \frac{(1+u)^2}{u} \frac{\partial \psi}{\partial u},$$

следующих из (1.9) главы IV после замены $w/\lambda = u$.

Определим, используя эти уравнения, перепад напора между точками линии тока $\psi = 0$. Выберем вначале точку $u = u_1 \gg 1$, т. е. точку, лежащую в физической плоскости в непосредственной близости от источника (на расстоянии порядка $R_1 = Q/\lambda \pi u_1$). Перепад напора между этой точкой и вершиной застойной зоны равен

$$\begin{aligned} H_1 - H_0 &= \int_0^{u_1} \frac{1+u}{u^2} \frac{\partial \psi(u, 0)}{\partial \theta} du = \\ &= r_2 \int_0^\infty \frac{(1+s^2) [1 - F_0(s, -u_1)]}{s \operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s \theta_1} \int_0^\alpha \xi(\tau) \sin s \tau d\tau ds = \\ &= \frac{Q \ln u_1}{\theta_1} - \frac{Q}{\theta_1} + O(a) + O\left(\frac{1}{\ln u_1}\right). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Для перепада напора между точками границы застойной зоны имеем

$$H_0 - H(\theta) = \int_0^\theta \chi(\theta) d\theta = r_2 \int_0^\infty \frac{(1+s^2) (\operatorname{ch} s \theta - 1)}{s \operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s \theta_1} \int_0^\alpha \xi(\tau) \sin s \tau d\tau ds. \quad (2.45)$$

В частности, при $\theta = \theta_1$

$$H_0 - H(\theta_1) = r_2 \int_0^\infty \frac{1+s^2}{s \operatorname{th} \pi s} \operatorname{th} \frac{\theta_1 s}{2} \int_0^\alpha \zeta(\tau) \sin s\tau d\tau ds \approx$$

$$\approx 2Q \int_0^\infty (1+s^2) \left(\frac{\operatorname{th} \frac{s\theta_1}{2}}{\operatorname{th} \pi s} - 1 \right) ds + \frac{3\pi Q}{\alpha^3} + \frac{6\pi Q}{5\alpha} + O(1). \quad (2.46)$$

До сих пор рассматривалась часть решения, отвечающая $0 \leq \theta \leq \theta_1$. Однако, в силу уже указанной симметрии задачи B , все формулы сохраняют смысл и для области $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_0$, если заменить θ на $\theta_0 - \theta$, а θ_1 на $\theta_2 = \theta_0 - \theta_1$ и отсчитывать координаты не от источника, а от стока. Таким образом может быть полностью построена граница застойной зоны и определен перепад давления между источником и стоком.

6. П р и м е р. Приведенные формулы позволяют определить все представляющие практический интерес величины для задачи об источнике и стоке (рис. 3.2) (или, что то же самое, для задачи об источнике вблизи прямолинейного контура питания, т. е. линии постоянного напора). Этому случаю отвечает $\theta_1 = \theta_2 = \pi$.

По формуле (2.42) для расстояния от источника до острия застойной зоны имеем

$$\lambda z_0 = 2Q \int_0^\infty \frac{s^2 \operatorname{ch} \pi s ds}{\operatorname{sh}^2 \pi s} = \frac{Q}{\pi}. \quad (2.47)$$

Далее, (2.43) дает при $\theta = \pi$

$$\frac{\lambda z(\pi)}{Q} = -\frac{3\pi}{\alpha^3} \left(1 - \frac{\alpha^2}{10} \right) + \frac{1}{\pi} + i \left(\frac{6}{\alpha^2} - \frac{1}{10} \right). \quad (2.48)$$

Наконец, из (2.44)

$$H_0 - H(\pi) = \frac{3Q\pi}{\alpha^3} + \frac{6\pi Q}{5\alpha} - \frac{10Q}{3\pi}. \quad (2.49)$$

Соотношение (2.48) устанавливает связь между параметрами α и Q и половиной расстояния между источником и стоком $L = -x(\pi)$. Граница застойной зоны, рассчитанная по формуле (2.43) при нескольких значениях $\alpha = \operatorname{sh}^2 \alpha/2$, показана на рис. 5.7 (точки).

Наряду с этим на рис. 5.7, 5.8 представлены результаты, полученные путем численного решения интегрального уравнения (2.38) и определения затем границы застойной зоны по приведенным выше соотношениям для пары источник — сток и для пятиточечной системы скважин; параметры, соответствующие отдельным кривым рис. 5.7 и 5.8, указаны в табл. 5.1. (даны значения $q/\lambda L$).

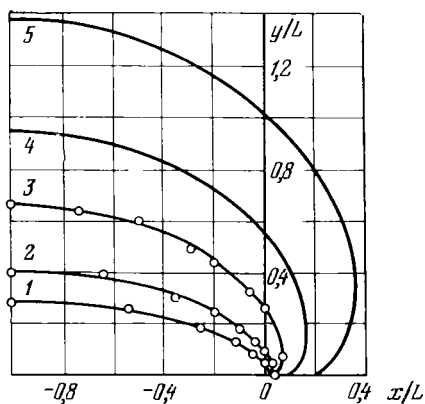


Рис. 5.7

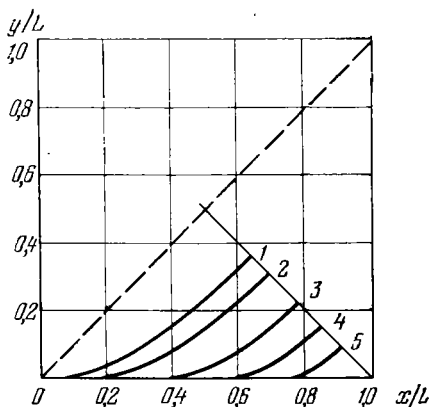


Рис. 5.8

Приведенные решения позволяют рассчитать перепад напора между скважиной достаточно малого радиуса и контуром питания. Выше уже было показано, что для одиночной скважины вблизи контура питания (рис. 3.3; 5.7) хорошие результаты дает приближенное решение для малых значений a , поэтому полученные на его основе зависимости $\Delta H/\lambda L$ от $q/\lambda L$ (безразмерные индикаторные кривые) можно принять за эталонные при отыскании простых приближенных формул для расчета перепада давления в условиях движения с предельным градиентом (сплошные линии на рис. 5.9).

Простейшее приближенное представление можно получить, если просто добавить к перепаду напора при фильтрации, следующей закону Дарси, перепад λL , необходимый для преодоления пре-

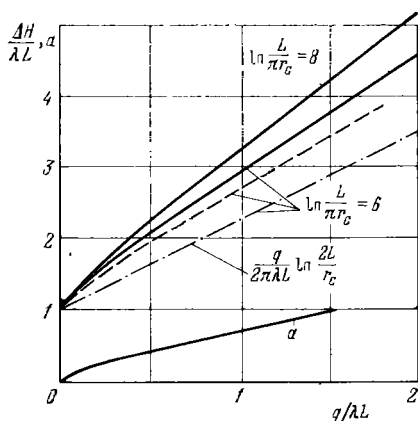


Рис. 5.9

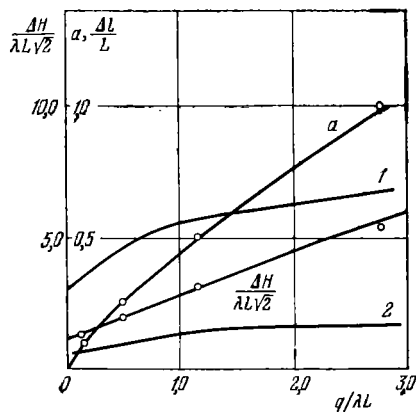


Рис. 5.10

дельного градиента давления между скважиной и контуром питания (штрих-пунктирная линия). Видно, что такой прием дает значительную (30—40%) ошибку в сторону занижения напора. Это нетрудно понять, если учесть, что образование застойных зон приводит к стеснению потока, в результате чего скорость фильтрации на оси потока возрастает. Это возрастание скорости и приводит к увеличению перепада напора.

Количественно это можно учесть следующим образом. Допустим, что распределение скорости фильтрации $w(r)$ известно. Тогда

$$\Delta H = \int_{r_c}^L \Phi(w) dr = \int_{r_c}^L (w + \lambda) dr.$$

Примем теперь приближенно

$$w(r) \approx \frac{q}{2\pi r} + \left(a\lambda - \frac{q}{2\pi L} \right) \quad (2.50)$$

(такое выражение имеет правильную асимптотику при $r \rightarrow 0$ и принимает нужное значение в центре симметрии потока).

Тогда получим

$$\Delta H = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{L}{r_c} + \left(a\lambda - \frac{q}{2\pi L} \right) L + \lambda L. \quad (2.51)$$

Используя известную зависимость $a(q/\lambda L)$ (нижняя кривая на рис. 5.9), легко построить зависимость $\Delta H(q/\lambda L)$. Результат расчета также показан на рис. 5.9 (пунктирная линия). Как видно из графика, результат оказывается значительно ближе к найденному прямым расчетом (ошибка $\sim 10\%$). Дополнительно убедиться в эффективности использованного приема можно на примере течения, следующего закону Дарси. В этом случае минимальное значение скорости на оси симметрии равно $q/\pi L$, так что приближенно

$$w(r) = \frac{q}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{L} \right), \quad \Delta H = \frac{q}{2\pi} \left(\ln \frac{L}{r_c} + 1 \right)$$

(вместо точного значения $\frac{q}{2\pi} \cdot \ln \frac{2L}{r_c}$), так что ошибка составляет $\ln \frac{e}{2} / \ln \frac{2L}{r_c} \approx 4\%$. При помощи того же приема построена и зависимость ΔH от $q/\lambda L$ при пятиточечной схеме расстановки скважин (рис. 5.10) для $\ln \frac{L}{r_c} = 7,3475$. Необходимая для расчета зависимость $a(q/\lambda L)$ также показана на этом рисунке.

§ 3. Приближенное решение задачи в плоскости годографа при малых значениях предельного градиента

При $\lambda = 0$ задача фильтрации с предельным градиентом переходит в детально изученную задачу линейной фильтрации, так что естественно ожидать, что при малых λ ($a \gg 1$) решение задачи будет близко к решению соответствующей линейной задачи. Ясно, однако, что попытка искать решение путем прямого разложения в ряд по малому параметру λ уравнений в физической плоскости, как это предлагалось в одной из ранних работ Георгицэ [241], должно привести к большим затруднениям, поскольку функция тока имеет в задаче фильтрации с предельным градиентом области постоянства (застойные зоны) и потому заведомо не может быть представлена равномерно сходящимся рядом из аналитических функций (решений уравнений Пуассона). С другой стороны, в плоскости годографа параметр λ оказывается равномерно малым всюду вне непосредственной окрестности линии нулевой скорости ($w = 0$), где характер вырождения основного уравнения (1.1) существенно различен при $\lambda = 0$ и $\lambda \neq 0$. Отсюда напрашивается следующий подход: искать приближенное решение задачи в области не слишком малых скоростей разложением по параметру λ , а затем продолжать решение в область малых скоростей в соответствии с точным решением.

Далее мы лишь наметим ход рассмотрения частного случая задачи A^* . Заметим, что эта задача сводится к изученным в гл. IV, если будет известно распределение $\psi(w, \theta_1) = g(w)$, $w > a\lambda$. Построение асимптотики решения при малых значениях предельного градиента ($a \gg 1$) основано на естественном соображении о том, что при $\lambda \rightarrow 0$, $a \rightarrow \infty$ ($a\lambda = w^* = \text{const}$) распределение $g(w)$ стремится к распределению $g_0(w)$, имеющему место в соответствующей задаче фильтрации, следующей закону Дарси ($\lambda = 0$).

Воспользуемся вновь уравнениями (1.16). Выражая $A(s)$ через $g(w)$, получим

$$\begin{aligned} A(s) &= \frac{1}{\text{sh } s\theta_1} \int_0^\infty \psi(u, \theta_1)(1+u) F(s_1 - u) du = \\ &= \frac{1}{\text{sh } s\theta_1} \left[\int_a^\infty g(u\lambda)(1+u) F(s_1 - u) du + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^a f_-(u)(1+u) F(s_1 - u) du \right]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Подставляя это выражение в (1.17), а полученное выражение для $C(s)$ в (1.16), будем иметь для $g(u\lambda)$ сингулярное интегральное

* Детали могут быть найдены в работе [68].

уравнение

$$\int_a^{\infty} g(v\lambda) K(u, v) dv = f(u); \quad (3.2)$$

$$K(u, v) = \frac{u^2(1+v)}{2} \int_0^{\infty} \frac{s^4(1+s^2) \operatorname{sh} s\theta_0}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_1 \operatorname{sh} s\theta_2} F(s, -v) F(s, -u) ds;$$

$$f(u) = -\frac{1}{2}u^2 \int_0^{\infty} \frac{s^4(1+s^2) F(s, -u)}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_2} \times$$

$$\times \left[\int_0^a \frac{f_-(v)(1+v) F(s, -v) \operatorname{sh} s\theta_0 dv}{\operatorname{sh} s\theta_1} + \sigma_1(s) \frac{\operatorname{ch} s\theta_2}{\operatorname{sh} s\theta_1} \right] ds. \quad (3.3)$$

Используя асимптотическое поведение функций $F(s, -v)$ при больших значениях аргумента s , удастся выделить главную сингулярную часть $K_0(u, v)$ ядра $K(u, v)$.

$$K_0(u, v) = K_0(\beta, \gamma) = \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{\gamma}{2} \operatorname{th}^{1/2} \frac{\beta}{2} \operatorname{th}^{3/2} \frac{\gamma}{2}}{2i\pi \operatorname{sh}^4 \frac{\gamma}{2}} \times$$

$$\times \int_{-i\infty}^{i\infty} \xi \frac{\sin \theta_0 \xi}{\sin \theta_1 \xi \sin \theta_2 \xi} \left(\frac{e^{-\beta}}{e^{-\gamma}} \right)^{\xi} d\xi; \quad (3.4)$$

$$u = \operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2}; \quad v = \operatorname{sh}^2 \frac{\gamma}{2}$$

и представить уравнение (3.2) в виде

$$\int_a^{\infty} g(v\lambda) K_0(u, v) dv = f(u) +$$

$$+ \int_a^{\infty} [K_0(u, v) - K(u, v)] g(v\lambda) dv = \varphi(u). \quad (3.5)$$

Если временно считать $\varphi(u)$ известной функцией, то оказывается, что интегральное уравнение (3.5) эффективно решается, т. е. $g(v\lambda)$ можно выразить через $\varphi(u)$. Связано это с тем, что именно такое уравнение возникло бы, если бы сразу решалась не задача фильтрации с предельным градиентом, а задача фильтрации, следующей закону Дарси. Поэтому необходимое решение может быть найдено, например, при помощи конформного отображения. С другой стороны, можно показать, что $K(u, v) \rightarrow K_0(u, v)$ при

$a \rightarrow \infty$ ($\lambda \rightarrow 0$). Разрешая (3.5) относительно $g(v, \lambda)$, получим

$$g(v\lambda) = \int_a^\infty f(u) R_0(u, v) du + \\ + \int_a^\infty g(w\lambda) \int_a^\infty R_0(u, v) [K_0(u, v) - K(u, v)] du dw. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) есть уравнение Фредгольма для $g(v\lambda)$, причем ядро его в некотором смысле мало при больших a (малых λ). Поэтому его можно эффективно решить методом малого параметра.

Указанная схема решения позволяет получить регулярное разложение в ряд при малых λ . Однако если достаточно ограничиться главным членом разложения решения, значительно удобнее простой метод, рассматриваемый в следующем параграфе.

§ 4. Построение приближенных решений методом внешних и внутренних разложений

1. Проанализируем структуру приближенного решения задачи в несколько более общем случае. Пусть задача приводится к отысканию решения уравнения (1.1) в полуполосе в плоскости годографа (рис. 3.1 ÷ 3.5) и допустим, что для всех концевых точек разрезов (a_i, θ_i) параметры $a_i \gg 1$. Допустим сверх того, что при $0 \leq u \leq a$, $a \gg 1$ граничные значения функции ψ или производной $\partial\psi/\partial\theta$ на разрезах и на боковых сторонах полосы постоянные (хотя, возможно, различные на разных сторонах разреза). Можно убедиться, подобно тому, как это было сделано выше, что при $\lambda \rightarrow 0$ решение задачи равномерно стремится к решению, которое соответствует обычному линейному закону фильтрации ($\lambda = 0$) и находится конформным отображением. Однако для определения границы застойной зоны необходимо вычислить предел

$$h(\theta) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} \frac{\partial\psi}{\partial u}$$

вблизи отрезков линии $u = 0$, на которых $\psi = \text{const}$, а для этой величины равномерная сходимость уже не имеет места. Действительно, при малых u решение вблизи линии $u = 0$, $\theta_0 < \theta < \theta^*$, на которой $\psi(0, \theta) = 0$, может быть представлено в виде

$$\psi(u, \theta, \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m u^2 F(2 - \alpha_m, 2 + \alpha_m, 3, -u) \sin \alpha_m \theta; \quad (4.1) \\ \alpha_m = \pi m / \theta^*.$$

Поскольку $F(0) = 1$, указанный выше предел существует при любом θ и равен

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2B_m \sin \alpha_m \theta,$$

так что в него дают вклад все члены ряда (4.1). С другой стороны, в случае $\lambda = 0$ решение при малых u представляется в виде

$$\psi_0(u, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m u^{\alpha_m} \sin \alpha_m \theta \equiv \psi(u, \theta, 0). \quad (4.2)$$

В результате предел $h(\theta)$ не существует при $\pi/\theta^* < 2$, равен нулю при $\pi/\theta^* > 2$ и лишь при $\theta^* = \pi/2$ имеет конечное значение. Во всех случаях предельное поведение определяется первым членом ряда (4.2).

Неравномерность приближения производных проявляется лишь в узкой полосе, прилегающей к линии $u = 0$ и представляющей собой пограничный слой. Отсюда следует простой прием построения равномерного приближения: искомое решение $\psi(u, \theta) = \psi(u, \theta, \lambda)$ заменяется приближенным $\psi_0(u, \theta) = \psi(u, \theta, 0)$ в области $u \gg 1$, а затем $\psi(u, \theta, \lambda)$ продолжается в область малых значений u уже как решение уравнения (1.1). Такой прием применим всегда, когда величина a достаточно велика и годится лишь для вычисления главного члена асимптотики. Вообще говоря, только этот член не зависит от положения вспомогательной границы, на которой точное решение заменяется приближенным (при условии, что граница проведена в области $u \gg 1$).

Нетрудно видеть, что при этом мы приходим к одному из вариантов метода внешних и внутренних разложений [32]. Построим внешнее решение задачи $\psi(w, \theta)$, полагая $\lambda = 0$, и найдем главный член его асимптотики в каждой из подполос ($0 \leq \theta \leq \theta_1$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_3$, $\theta_3 \leq \theta \leq \theta_0$, $u \leq a$), на которые прилегающая к линии $w = 0$ часть основной полосы разбивается разрезами. Тогда имеем для главного члена разложения при $w \rightarrow 0$

$$\psi \sim B_1^0 w^{\alpha_1} \sin \alpha_1 \theta, \quad (4.3)$$

где B_1^0 известно.

С другой стороны, построим внутреннее решение для данной подполосы, имеющее вид (4.1). Его асимптотика при $w/\lambda \rightarrow \infty$ имеет, как легко установить, используя формулы аналитического продолжения (см. также (4.25) главы III), вид

$$\psi \sim \sum_{m=1}^{\infty} 2B_m \lambda^2 \sin \alpha_m \theta \frac{\Gamma(2\alpha_m)}{\Gamma(2 + \alpha_m) \Gamma(1 + \alpha_m)} \left(\frac{w}{\lambda}\right)^{\alpha_m}. \quad (4.4)$$

Требую, чтобы это решение соответствовало асимптотике (4.3) и чтобы при фиксированном w решение (4.4) оставалось равно-

мерно ограниченным при $\lambda \rightarrow 0$, получаем

$$B_1 = B_1^0 \lambda^{z_m-2} \frac{\Gamma(2+\alpha_m) \Gamma(1+\alpha_m)}{2\Gamma(2\alpha_m)}; \quad B_m = O(\lambda^{z_m-2}). \quad (4.5)$$

Отсюда следует, что координаты границы застойной зоны даются выражением

$$\begin{aligned} x(\theta) + iy(\theta) &= B_1^0 \lambda^{z_1-1} \frac{\Gamma(2+\alpha_1) \Gamma(1+\alpha_1)}{\Gamma(2\alpha_1)} (1 + O(\lambda^{z_1^*})) \times \\ &\times \frac{e^{i\theta}}{1 - \alpha_1^2} (\sin \alpha_1 \theta - i \alpha_1 \cos \alpha_1 \theta) + c. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Выражение (4.6) определяет положение застойной зоны с точностью до параллельного переноса.

Из приведенных рассуждений следует, что с точностью до малых величин положение застойной зоны совпадает с положением критических точек потока для задачи линейной фильтрации.

2. Рассмотрим в качестве примера задачу о кольцевой батарее скважин. Соответствующая задача в плоскости годографа представлена на рис. 3.5; застойной зоне отвечает отрезок $u = 0, 0 \leq \theta \leq \leq \theta_1 = \pi \frac{n-1}{n}$, где n — число скважин в батарее.

Найдем, согласно сказанному ранее, решение соответствующей задачи при фильтрации, следующей закону Дарси. В данном случае решение это проще искать не в плоскости годографа, а непосредственно записав комплексный потенциал течения в физической плоскости

$$W = -H + i\psi = \frac{q}{2\pi} \ln(z^n - L^n),$$

где L — радиус батареи. Для комплексной скорости имеем

$$we^{-i\theta} \approx \frac{qnz^{n-1}}{2\pi(z^n - L^n)}.$$

Отсюда вблизи критической точки потока $z = 0$ имеем

$$we^{-i\theta} \approx -\frac{qnz^{n-1}}{2\pi L^n}; \quad W \approx -\frac{qz^n}{2\pi L^n},$$

откуда

$$W \approx -\frac{q}{2\pi} \left(-\frac{2\pi Lw}{n} \right)^{\frac{n}{n-1}} e^{-i\frac{\theta n}{n-1}}. \quad (4.7)$$

Отсюда получаем, что вблизи линии $u = 0, 0 \leq \theta \leq \theta_1$,

$$\psi \approx \frac{q}{2\pi} \left(\frac{2\pi Lw}{n} \right)^{\frac{n}{n-1}} \sin \frac{\theta n}{n-1}. \quad (4.8)$$

При этом характерное значение скорости в задаче на плоскости годографа U равно максимальному значению скорости на оси симметрии между скважинами. Используя выражение (4.6), находим

$$U = \frac{q}{2\pi L} (n-1)^{\frac{n-1}{n}}. \quad (4.9)$$

Полагая в (4.6) в соответствии с (4.8)

$$B_1^0 = \frac{q}{2\pi} \left(\frac{2\pi L}{n} \right)^{\frac{n-1}{n}}, \quad \alpha_1 = \frac{n}{n-1}, \quad (4.10)$$

находим границу застойной зоны.

Воспользуемся возможностью сопоставления получаемого таким образом приближенного решения с результатами точного численного расчета (§ 2). Примем $n = 6$, $\alpha_1 = 1,2$. На рис. 5.4 сопоставлены результаты расчетов (пунктирные линии 7' и 8') по приближенной формуле (4.6) с численным расчетом для $a = 5$ и 10. Сопоставление показывает, что приближенное решение применимо вплоть до $a \approx 5$.

Преимущество простого приближенного рассмотрения, изложенного в данном параграфе, состоит в том, что оно в равной мере применимо и в тех случаях, когда в области весьма малых скоростей w движение не следует точно закону фильтрации с предельным градиентом, а отклоняется от него и подчиняется более сложным зависимостям. При этом характер течения в области малых скоростей может быть изучен по простым элементарным решениям, «спиваемым» с внешним решением, получаемым на основе линейного закона фильтрации. Это обстоятельство будет более подробно рассмотрено ниже (гл. VIII).

3. Наконец, тот же прием может быть применен при достаточно малых λ к более сложным течениям, не допускающим взаимнооднозначного отображения на плоскость годографа. Здесь застойные зоны могут возникнуть вблизи критических точек невозмущенного течения ($\lambda = 0$) или вблизи бесконечно удаленной точки, т. е. вблизи тех точек невозмущенного течения, где скорость обращается в нуль, и величина λ оказывается существенной, какой бы малой она ни была.

Каждую критическую точку можно окружить линией, на которой скорость w принимает постоянное значение $a \gg \lambda$. Тогда на этих граничных линиях распределение функции тока и скорости можно считать таким же, как и при $\lambda = 0$. Течение же внутри выделенных окрестностей обладает локальной симметрией и состоит из некоторого числа одинаковых секториальных областей, каждая из которых допускает отображение на прямоугольник в плоскости годографа. В результате легко построить приближенную картину течения и застойные зоны в выделенных областях. Естественно, что наибольший интерес представляют в этом случае внеш-

ние застойные зоны, окружающие бесконечно удаленную точку, так как застойные зоны вблизи внутренних критических точек потока имеют при малых λ малые размеры.

§ 5. Предельные решения и оценки для застойных зон

1. Для уравнения (0.1) главы IV в плоскости годографа скорости справедлив принцип максимума со всеми вытекающими из него следствиями. Пусть, в частности, граница Γ области Δ в плоскости годографа состоит из трех частей: Γ_- , Γ_0 и Γ_+ , причем

$$\psi|_{\Gamma_-} = \min \psi_{\Delta} = m, \quad \psi|_{\Gamma_+} = \max \psi_{\Delta} = M, \quad m < \psi|_{\Gamma_0} < M. \quad (5.1)$$

«Вдавим» теперь часть границы Γ_- внутрь области Δ (в смысле § 4 гл. II), т. е. перейдем от задачи в области Δ к задаче в области $\Delta' \subset \Delta$, причем $\psi|_{\Gamma'} = m$; $\psi|_{\Gamma', \Gamma'_-} = \Psi|_{\Gamma, \Gamma_-}$, $\Gamma'/\Gamma'_- = \Gamma/\Gamma_-$. Тогда в точках области Δ' имеем, очевидно, $\Psi' \leq \psi$, а на общей части границы $\partial\Psi'/\partial n < \partial\psi/\partial n$ (производные берутся в направлении внутренней нормали). «Вдавливание» части границы Γ_+ приводит к противоположным неравенствам.

Применим теперь сказанное к задаче A , отвечающей круговой батарее n -источников равной интенсивности (рис. 3.4). «Разрез» $0 \leq u \leq a$, $\theta = \theta_1$ составляет часть границы Γ_- и его «вдавливание», т. е. увеличение a , приводит к уменьшению решения во всех точках и его нормальных производных во всех общих точках границы. Таким образом, имеем ($a' \geq a$)

$$\begin{aligned} \psi_{a'} &\leq \psi_a, \quad 0 \leq \frac{\partial\psi_{a'}}{\partial\theta} \leq \frac{\partial\psi_a}{\partial\theta} \leq \frac{Q}{\theta_0} \quad (\theta = 0); \\ \frac{Q}{\theta_0} &\leq \frac{\partial\psi_0}{\partial\theta} \leq \frac{\partial\psi_a}{\partial\theta} \leq \frac{\partial\psi_{a'}}{\partial\theta} \leq \frac{Q}{\theta_0 - \theta_1} \quad (\theta = \theta_0); \\ 0 &\leq \frac{\partial\psi_{a'}}{\partial(u^2)} \leq \frac{\partial\psi_a}{\partial(u^2)} \leq \frac{\partial\psi_0}{\partial(u^2)} \quad (0 \leq \theta \leq \theta_1, u = 0). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь использована еще очевидная для данной задачи оценка

$$0 \leq \psi(u, \theta) \leq \frac{Q\theta}{\theta_0}, \quad (5.3)$$

а при вычислении нормальной производной при $u = 0$ введена вспомогательная координата, равная u^2 .

Через ψ_0 обозначено решение, отвечающее предельному случаю $a = 0$, это решение, которое легко построить в явном виде методами гл. IV, мы будем называть предельным.

2. Используя неравенства для производных (5.2) и формулы возвращения на физическую плоскость (1.8 главы III), удастся показать, что при неизменных значениях параметров Q , θ_0 , θ_1

с уменьшением параметра a застойная зона в пределах элемента симметрии течения «отодвигается» от соответствующего источника [66]. Схематическое расположение границ застойных зон при различных значениях параметра a показано на рис. 5.11 ($a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 = 0$) для течения в элементе в виде клина с углом раствора $2(\pi - \theta_0)$. (Очевидно, на физической плоскости роль непроницаемых стенок клина могут играть плоскости симметрии картины течения.) Характерный размер L , представляющий собой расстояние от источника до непроницаемой стенки, монотонно возрастает с уменьшением a от нуля при $a = \infty$ до бесконечности при $a = 0$ (последнее будет доказано ниже). В то же время характерный размер AB изменяется от нуля до некоторого предельного значения L_* , достигаемого при $a = 0$. Из рис. 5.11 следует весьма простой, хотя и грубый способ оценки снизу размеров застойной зоны: если заданы интенсивность источника Q и характерный размер L , то застойная зона будет заведомо больше, чем попадающая внутрь клина часть застойной зоны, отвечающей $a = 0$ (на рис. 5.11 заштрихована). Эта оценка будет тем лучше, чем больше величина L (при прочих равных условиях). Напротив, при $L < L_* \sin \theta_1$ она, очевидно, становится тривиальной. Само предельное решение с $a = 0$ описывает структуру потока вблизи «острия» застойной зоны.

3. Аналогичное проведенному рассмотрению допускает и задача Б при краевых условиях вида

$$\psi(0, \theta) = \psi(u, 0) = \psi(0, \theta_0) = 0; \quad \psi(u, \theta_1) = Q \quad (a \leq u < \infty). \quad (5.4)$$

И в этом случае при уменьшении параметра a решение $\psi(u, \theta)$ возрастает, равно как и его производные по направлению внутренней нормали к «внешним» границам области. Имеем, таким образом,

$$0 \leq \psi_\infty \leq \psi_{a'} \leq \psi_a \leq \psi_0 \quad (a' > a); \quad (5.5)$$

$$0 \leq \psi_0(u, \theta) \leq Q\theta/\theta_1 \quad (0 \leq \theta \leq \theta_1);$$

$$0 \leq \psi_0(u, \theta) \leq Q(\theta_0 - \theta)/(\theta_0 - \theta_1) \quad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_0);$$

$$0 \leq \frac{\partial \psi_{a'}}{\partial \theta} \leq \frac{\partial \psi_a}{\partial \theta} \leq \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} \leq \frac{Q}{\theta_1}, \quad (\theta = 0);$$

$$-\frac{Q}{\theta_2} \leq \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} \leq \frac{\partial \psi_a}{\partial \theta} \leq \frac{\partial \psi_{a'}}{\partial \theta} \leq 0 \quad (\theta = \theta_0);$$

$$0 \leq \frac{\partial \psi_{a'}}{\partial (u^2)} \leq \frac{\partial \psi_a}{\partial (u^2)} \leq \frac{\partial \psi_0}{\partial (u^2)} \quad (u = 0);$$

$$\frac{Q}{\theta_1} \leq \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} \leq \frac{\partial \psi_a}{\partial \theta} \leq \frac{\partial \psi_{a'}}{\partial \theta} \quad (u \geq a, \theta = \theta_1 - 0);$$

$$-\frac{Q}{\theta_2} \geq \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} \geq \frac{\partial \psi_a}{\partial \theta} \geq \frac{\partial \psi_{a'}}{\partial \theta} \quad (u \geq a, \theta = \theta_1 + 0).$$

Используя соотношения (5.6) и формулы возвращения, также удается убедиться, что с уменьшением параметра a застойные зоны в элементе симметрии течения «отодвигаются» от соответствующего источника, увеличиваясь при этом в размере по аналогии со схемой рис. 5.11. Предельное ($a = 0$) решение задачи B может быть использовано для получения нижней оценки размеров застойных зон подобно тому, как это описано на примере задачи A в разделе 2 данного параграфа.

4. Предельные решения задач A и B легко строятся методами гл. IV. Так, для задачи A с условиями

$$\psi(u, 0) = \psi(0, \theta) = 0 \quad (0 \leq \theta \leq \theta_1); \quad (5.7)$$

$$\psi(0, \theta) = Q(\theta - \theta_1)/\theta_2 \quad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_0 = \theta_1 + \theta_2); \quad \psi(u, \theta_0) = Q$$

(рис. 3.5) предельное решение имеет вид

$$\psi(u, \theta) = \frac{Qu^2}{\theta_2} \int_0^\infty \frac{(1+s^2) \operatorname{sh} s\theta \operatorname{sh} s\theta_2}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} F(s, -u) ds \quad (0 \leq \theta \leq \theta_1); \quad (5.8)$$

$$\psi(u, \theta) = \frac{Q(\theta - \theta_1)}{\theta_2} + \frac{Qu^2}{\theta_2} \int_0^\infty \frac{(1+s^2) \operatorname{sh} s(\theta_0 - \theta) \operatorname{sh} s\theta_1}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} F(s, -u) ds$$

$$(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_0).$$

Отсюда получаем для координат границы застойной зоны, соответствующей отрезку $0 \leq \theta \leq \theta_1$, $u = 0$

$$z(\theta) = \frac{2Q}{\lambda\theta_2} e^{i\theta} \int_0^\infty \frac{s \operatorname{ch} \theta s - i \operatorname{sh} s\theta}{\operatorname{sh} s\theta_0 \operatorname{th} \pi s} \operatorname{sh} s\theta_2 ds. \quad (5.9)$$

Для важнейшего частного случая, отвечающего задаче о кольцевой батарее n скважин, $\theta_0 = \pi$; $\theta_1 = \pi(n-1)/n$, так что

$$z(\theta) = \frac{Q}{\lambda\pi\theta_2} e^{i\theta} \left[\frac{\theta_2 \cos \theta + \sin \theta_2}{\cos \theta_2 + \cos \theta} + \frac{\theta \sin \theta_2 + \theta_2 \sin \theta}{(\cos \theta_2 + \cos \theta)^2} \sin \theta - \right. \\ \left. - i \frac{\theta \sin \theta_2 + \theta_2 \sin \theta}{\cos \theta_2 + \cos \theta} \right] \quad (0 \leq \theta \leq \theta_1). \quad (5.10)$$

На рис. 5.12 показаны границы застойных зон, соответствующие предельным решениям задачи A . Изображен участок границы в одном элементе симметрии течения, начало координат выбрано совпадающим с источником, принадлежащим данному элементу симметрии.

Как уже говорилось, предельные решения позволяют оценить снизу размеры застойных зон для рассматриваемых усло-

вий. Для этого достаточно изобразить на одном чертеже в безразмерных координатах $\xi = \lambda x \pi / q$, $\eta = \lambda y \pi / q$ элемент симметрии рассматриваемой конфигурации и границы застойной зоны для соответствующего предельного решения. Тогда попадающая внутрь данного элемента симметрии часть предельной застойной зоны будет целиком лежать внутри истинной застойной зоны.

Рис. 5.12

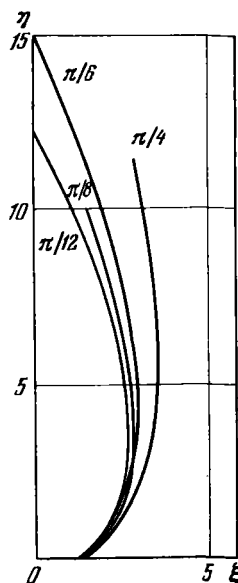
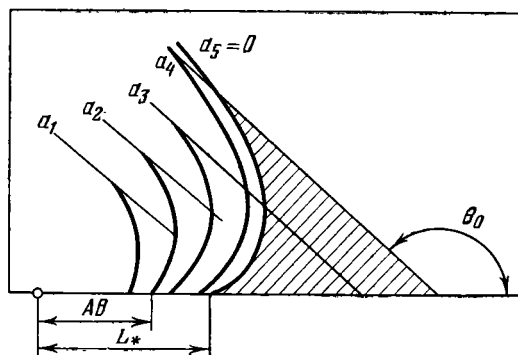


Рис. 5.11



Примеры применения такого способа построения оценок при помощи решений рис. 5.12 показаны на рис. 5.4 для случая батареи шести источников $n = 6$ (точное решение — сплошные линии; предельное — штрих-пунктирные (3'', 4'')).

Аналогичным образом могут быть построены и использованы предельные решения задачи Б.

Глава VI

Решение задач фильтрации с предельным градиентом в случае неоднолистности отображения

В рассмотренных ранее задачах удавалось выделить такой элемент симметрии течения, который допускал взаимно-однозначное отображение на плоскость годографа. Поэтому создается впечатление, что этими случаями исчерпываются все те ситуации, когда эффективно применение преобразования годографа. Ниже на примере фильтрации с предельным градиентом показано, что даже в задачах, не допускающих однолистного отображения на плоскость годографа, преобразование годографа может оказаться полезным, позволяя свести задачу к решению связанных краевых задач одновременно на нескольких листах плоскости годографа w, θ .

При этом используется то обстоятельство, что отображение области течения ($w > 0$) на плоскость годографа является квазиконформным [29, 111].

§ 1. Формулировка задачи.

Отображение на многолистную поверхность

1. Рассмотрим вначале сравнительно простую задачу о течении, создаваемом двумя источниками различной интенсивности (Q и q), принимая при этом, что на бесконечности течение стремится к радиальному течению, отвечающему потоку $Q + q$ (рис. 6.1). Нетрудно представить себе качественно возможную картину течения (рис. 6.1, а). Возникает вопрос: какова степень произвола в этой картине и что дает попытка отображения ее на плоскость годографа скорости.

Рассмотрим векторное поле скоростей фильтрации w . Особые точки этого поля — источники и стоки, являющиеся в топологическом смысле [105, 146] узлами, и, возможно, критические точки, превращающиеся при фильтрации с предельным градиентом в застойные области (зоны). Все эти особые точки и области сосредоточены в конечной части плоскости. Проводя окружность достаточно большого радиуса, легко подсчитать на ней вращение вектора скорости фильтрации, которое оказывается равным $+1$ (т. е. при обходе ее вектор скорости фильтрации совершает один оборот против часовой стрелки). Отсюда следует, что сумма топо-

логических индексов особых точек и застойных зон, находящихся в конечной части плоскости, равна $+1$, суммарный индекс критических точек (застойных зон) равен -1 . Границы застойной зоны образованы выпуклыми внутрь нее дугами линий тока, сопрягающимися в точках возврата. Отсюда следует, что при обходе застойной зоны против часовой стрелки вектор скорости фильтрации вращается по часовой стрелке и при полном обходе совершает n оборотов. Таким образом, индекс застойной зоны равен n . Величину n

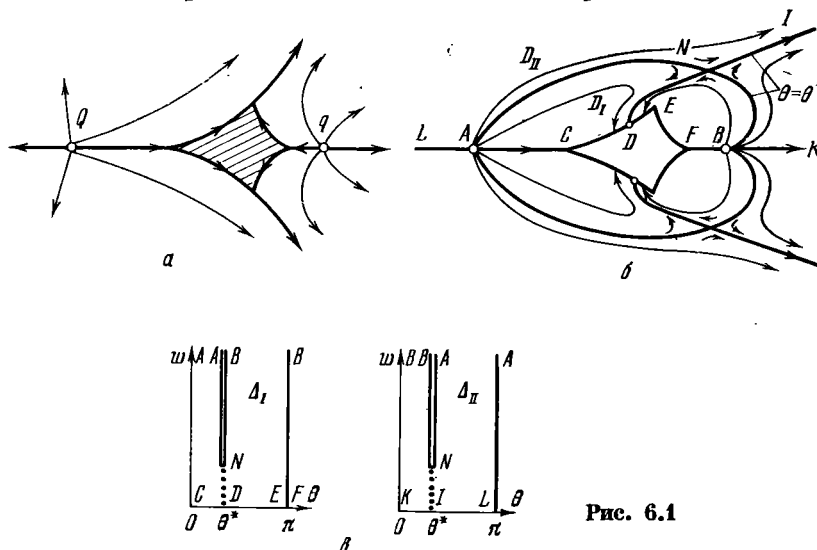


Рис. 6.1

будем называть кратностью застойной зоны, при $n = 1$ будем говорить о простой застойной зоне. В случае, если застойные зоны не образуются, соответствующие отрицательные индексы имеют критические точки (простые и кратные).

Теперь очевидно, что в приведенном примере образуется одна (и только одна) простая застойная зона (критическая точка, если предельный градиент отсутствует).

2. Допустим теперь, что на рис. 6.1 проведены линии равных направлений скорости $\theta = \text{const}$. Векторы направлений этих линий ω (θ_x , $-\theta_y$) образуют новое векторное поле, которое будем называть производным по отношению к полю w . Если интерпретировать ω как фиктивную скорость, то угол θ представляет собой «функцию тока» этого фиктивного потока. Отсюда сразу следует, что при обходе особых точек поля скоростей — источников и стоков — угол θ получает конечное положительное приращение, а при обходе критических точек или застойных зон — конечное отрицательное приращение. Таким образом, источники и стоки фильтрационного потока играют роль источников фиктивного потока ω , а критические точки и границы застойных зон — роль стоков (точечных или распределенных по линии). Обходу каждой из этих

точек или застойной зоны соответствует положительное вращение вектора ω , т. е. все указанные точки являются узлами и имеют, равно как и простая застойная зона, положительный индекс, равный 1 по отношению к полю ω . Ввиду однозначности угла θ во всех особых точках поля w других узлов внутри области движения поле иметь не может. Оно может иметь еще некоторое число критических (седловых) точек. Подсчитаем их число для рассмотренного примера. На той же удаленной окружности вращение поля ω равно 1. Отсюда следует, что сумма индексов всех внутренних особых точек и застойной зоны равна $+1$, а это означает, по сказанному выше, что имеется либо два простых седла поля, либо одно двукратное. В силу симметрии расположение седел отвечает рис. 6.1, б и в них θ принимает некоторые значения $\pm\theta^*$. Согласно общей теории через седловую точку N проходит пара линий уровня $\theta = \theta^*$. Четыре ветви линии уровня $\theta = \theta^*$, выходящие из одного седла, должны принадлежать к пучкам, сходящимся в различных узлах и на застойной зоне, так как иначе образовалась бы петля, окруженная линией $\theta = \theta^*$. Таким образом, по одной ветви линии уровня $\theta = \theta^*$ выходит из каждого источника, одна ветвь уходит на границу застойной зоны и еще одна на бесконечность, как показано на рис. 6.1, б. Векторы ω и $\text{grad } w$ обращаются в нуль в области течения (при $w > 0$) одновременно. Отсюда вытекает, что точка N является также седловой точкой линий уровня w . Далее, легко убедиться, что на каждой из выделенных ветвей линии уровня $\theta = \theta^*$ производная от модуля скорости вдоль линии уровня dw/ds не обращается в нуль нигде, за исключением критической точки N . Поэтому вдоль каждой из ветвей линии уровня $\theta = \theta^*$ и вдоль любой другой линии уровня угла модуль скорости изменяется монотонно, и можно на каждой линии уровня указать направление. Под положительным направлением далее понимается направление убывания модуля скорости. Соответственно узлы поля линий постоянного угла и граничные линии могут быть поделены на отталкивающие (от которых линии уровня угла отходят) и притягивающие (к которым линии уровня угла подходят).

К каждому седлу подходят две ветви линии уровня $\theta = \theta^*$, и от него отходят также две ветви линии уровня. Подходящие линии уровня вместе с границей застойной зоны разбивают область движения на две части D_I и D_{II} (рис. 6.1, б). Любая область, целиком лежащая внутри одной из областей D_I или D_{II} и не охватывающая особых точек (источников) или застойной зоны, отображается на плоскость годографа взаимно-однозначно. Это основное для последующего утверждение следует из того обстоятельства, что любая область указанного вида покрывается семейством линий $\theta = \text{const}$, относящихся к одному пучку, сходящемуся на застойной зоне или в бесконечно удаленной точке, и потому к различным значениям угла, а на каждой из этих линий модуль скорости изменяется монотонно.

Отметим еще, что можно было бы «разрезать» плоскость не по подходящим, а по отходящим от седла линиям уровня. При этом сделанное утверждение сохранилось бы полностью, только пришлось бы потребовать, чтобы рассматриваемые области не охватывали источников.

Область D_I разбивается осью симметрии Ox на две симметричные части. Рассмотрим отображение на плоскость годографа верхней половины области D_I с выколотой точкой B (источником). Легко видеть, что образом указанной области служит полуполоса Δ_I плоскости $w\theta$ с разрезом вдоль отрезка $w^* < w < \infty$, $\theta = \theta^*$, где θ^* и w^* — значение угла и модуля скорости, отвечающие седловой точке N (рис. 6.1, в). Берега разреза служат образом сепаратрисы седла $\theta = \theta^*$.

Аналогично, верхняя половина области D_{II} отображается на такую же полуполосу (Δ_{II}) с разрезом; соответствие точек показано на рис. 6.1, в.

3. В плоскости годографа функция тока ψ удовлетворяет уравнению (0.1) главы IV во всех внутренних точках областей Δ_I и Δ_{II} .

При этом должны выполняться очевидные граничные условия: в области Δ_I

$$\begin{aligned}\psi &= 0 \quad (\theta = 0, \quad 0 \leq w < \infty; \quad w = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi; \\ \theta &= \pi, \quad 0 \leq w < \infty),\end{aligned}\tag{1.1}$$

в области Δ_{II}

$$\begin{aligned}\psi &= -1/2q \quad (\theta = 0, \quad 0 \leq w < \infty) \quad \psi = -\frac{q}{2} + \frac{\theta}{2\pi}(q + Q) \\ (w &= 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi), \quad \psi = 1/2Q \quad (\theta = \pi, \quad 0 \leq w < \infty).\end{aligned}\tag{1.2}$$

Таким образом, остались невыясненными лишь условия на берегах разреза ANB , определяющие связь между решениями в областях Δ_I и Δ_{II} . На линии ANB в физической плоскости

$$w_I = w_{II}; \quad \theta_I = \theta_{II}; \quad x_I = x_{II}; \quad y_I = y_{II}; \quad \psi_I = \psi_{II},\tag{1.3}$$

т. е. на границе между областями D_I и D_{II} (Δ_I и Δ_{II}) непрерывны физические координаты, координаты в плоскости годографа и функция тока. В плоскости годографа левый берег разреза в области Δ_I отвечает правому в области Δ_{II} , и наоборот. В результате получаем при $w \geq w^*$

$$\begin{aligned}\psi_I(w, \theta^* \pm 0) &= \psi_{II}(w, \theta^* \mp 0), \\ x_I(w, \theta^* \pm 0) &= x_{II}(w, \theta^* \mp 0), \quad y_I(w, \theta^* \pm 0) = y_{II}(w, \theta^* \mp 0).\end{aligned}\tag{1.4}$$

Удобно несколько преобразовать последние условия, продифференцировав их по w . Имеем, с учетом выражений для координат,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_I(w, \theta^* + 0)}{\partial w} &= \frac{\cos \theta^*}{w^3} \frac{\partial \psi_I(\theta^* + 0)}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta^*}{w} \frac{\partial \psi_I(\theta^* + 0)}{\partial w} = \\ &= \frac{\cos \theta^*}{w^3} \frac{\partial \psi_{II}(\theta^* - 0)}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta^*}{w} \frac{\partial \psi_{II}(\theta^* - 0)}{\partial w} = \frac{\partial x_{II}(w, \theta^* - 0)}{\partial w} \end{aligned} \quad (1.5)$$

и т. д.

С учетом равенства

$$\frac{\partial \psi_I(\theta^* \pm 0)}{\partial w} = \frac{\partial \psi_{II}(\theta^* \mp 0)}{\partial w},$$

следующего из первых двух условий (1.4), получаем из (1.5)

$$\frac{\partial \psi_I(w, \theta^* \pm 0)}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi_{II}(w, \theta^* \mp 0)}{\partial \theta}.$$

Таким образом, из условий (1.4) следуют уравнения

$$\psi_I(w, \theta^* \pm 0) = \psi_{II}(w, \theta^* \mp 0), \quad \frac{\partial \psi_I(w, \theta^* \pm 0)}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi_{II}(w, \theta^* \mp 0)}{\partial \theta}. \quad (1.6)$$

Будем рассматривать области Δ_I и Δ_{II} как два листа двулистной римановой поверхности и считать, что левый берег разреза на нижнем листе склеен с правым берегом разреза на верхнем листе, а левый берег разреза на верхнем листе склеен с правым берегом разреза на нижнем листе. Условия (1.6) означают, что функция $\psi(w, \theta)$, равная $\psi_I(w, \theta)$ на первом листе римановой поверхности и $\psi_{II}(w, \theta)$ на втором листе римановой поверхности, гладко продолжается с листа на лист, т. е. удовлетворяет уравнению (1.2) на всей двулистной римановой поверхности.

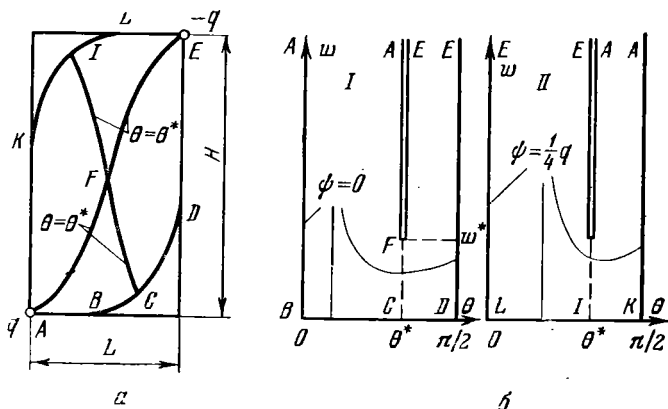
При переходе от задачи в физической плоскости к задаче в плоскости годографа величины θ^* и w^* играют роль неопределенных параметров. Для их определения необходимы два условия; одно условие состоит в том, что расстояние между источниками должно принимать заданное значение L .

Чтобы получить второе условие, заметим, что при обратном переходе с плоскости годографа на физическую плоскость преобразы линий AC и FB обязательно будут параллельны, но не обязательно будут коллинеарны. Дополнительное условие коллинеарности имеет, как следует из формул возвращения, вид

$$\int_0^\pi \sin \theta \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{w} \frac{\partial \psi_I}{\partial w} d\theta = 0. \quad (1.7)$$

Условие (1.7) относится к случаю движения с предельным градиентом. Если предельного градиента нет, то нет и застойных

Рис. 6.2



зон, так что указанное выше дополнительное условие теряет смысл. Однако и в этом случае можно указать дополнительное условие, состоящее в том, что точка, в которую стягивается застойная зона и которая отображается в линию $w = 0$ плоскости годографа, является критической точкой, т. е. кратной точкой линии уровня функции тока ψ . Отсюда следует, что в окрестности линии $w = 0$, на которой ψ постоянна, разность $\psi(w^0, \theta) - \psi(0, \theta)$, где w^0 — достаточно малое число, должна менять знак при изменении θ от 0 до π . Это означает, что в разложении

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} A_k P_k(w) \sin k\theta, \quad (1.8)$$

справедливом вблизи линии $w = 0$, где $P_k(w)$ — ограниченные при $w = 0$ решения уравнения

$$\frac{w^2}{\Phi} \frac{d}{dw} \left(\frac{\Phi^2}{w\Phi'(w)} \frac{dP}{dw} \right) - k^2 P(w) = 0,$$

первый коэффициент должен обращаться в нуль (в случае кратной критической точки в нуль должно обращаться соответствующее число членов разложения (1.8)). Нетрудно видеть, что указанное условие совпадает с (1.7).

В качестве второго примера рассмотрим течение в элементе прямоугольной сетки скважин (рис. 6.2).

Течение указанного вида обладает, очевидно, центральной симметрией; центр симметрии (точка F на рис. 6.2) является седловой точкой; отвечающие ей значения угла θ^* и скорости w^* неизвестны. Отображение плоскости течения на два листа плоскости годографа показано на рис. 6.2, б.

Два листа плоскости годографа сшиты «наперекрест» по разрезу AFE, на котором выполняются условия (1.6).

Параметрами физической задачи являются величины q , H и L (рис. 6.2); параметрами задачи в плоскости годографа — величины q , θ^* и w^* , две из которых подлежат определению.

Дальнейшие примеры течений, приводящих к краевым задачам на многолистной поверхности, приведены в [72].

При этом для одних задач (например, для задачи о течении в прямоугольном элементе сетки источников и стоков, рис. 6.2) число параметров в физической плоскости и плоскости годографа одинаково. В других же задачах (в частности, в задачах о двух источниках) число параметров задачи в физической плоскости меньше, чем в плоскости годографа. Это означает, что задача в плоскости годографа содержит избыточные решения, не допускающие той интерпретации, которая была заложена в картине течения на физической плоскости. Избыточные решения появляются из-за того, что в соответствующих задачах внутри области движения имеются особые точки (источники или критические точки) или области (застойные зоны), окрестность которых не допускает однолистного отображения на плоскость годографа $w\theta$. В результате при отображении приходится проводить в физической плоскости разрезы. По физическим соображениям на этих разрезах непрерывны координаты x и y . Однако при формулировке задачи взамен условия непрерывности координат было принято условие непрерывности производных $\partial\varphi/\partial\theta$ и $\partial\varphi/\partial w$. В результате этого решение задачи в плоскости годографа не удовлетворяет, вообще говоря, условию равенства координат в соответственных точках берегов разреза, и это условие должно быть наложено дополнительно. Выше это уже было продемонстрировано на простом примере течения, создаваемого источником и стоком различной интенсивности.

§ 2. О решении задач на двулистной поверхности

Краевые задачи на двулистных и многолистных поверхностях могут быть решены теми же методами, что и однолистные задачи. В работе [72] показано, в частности, что для фильтрации с предельным градиентом эти задачи могут быть решены методами предыдущей главы, т. е. сведены к системе парных интегральных уравнений, а затем — к системе уравнений Фредгольма, допускающей эффективное решение. В работах [86, 87] исследована разрешимость сформулированных выше краевых задач и предложено их решать численно после предварительного отображения на однолистную область. Однако при этом теряются многие из преимуществ простоты уравнений (0.1) главы IV. Поэтому представляется более естественным решать численно непосредственно задачу на многолистной поверхности.

Детальные расчеты такого рода проведены в [28], частично они приводятся в [82], где получены поля скоростей фильтрации, напора и функции тока для системы «источник — сток» и для

течения в прямоугольном элементе сетки скважин при фильтрации с предельным градиентом и при кусочно-линейном законе фильтрации вида (2.4) главы VIII.

Анализ этих результатов позволяет сделать ряд выводов общего характера.

Прежде всего прямой расчет подтвердил правомерность приближенного метода расчета перепада напора между скважинами, предложенного в § 2 главы V. На рис. 5.10 эти результаты показаны (для элемента пятиточечной сетки скважин) точками. Далее, упоминавшийся выше эффект усиления неравномерности фильтрационного потока из-за нелинейности закона фильтрации отчетливо проявляется помимо образования застойных зон в том, что область, через которую проходит основная часть потока, сужается по мере уменьшения интенсивности потока. Так, на рис. 5.10 показано отношение максимальной ширины струи Δl , через которую проходит 80% потока (кривая 1) и 20% потока (кривая 2) к размеру сетки L для квадратного элемента.

Глава VII

Некоторые задачи вытеснения несмешивающихся жидкостей при нелинейной фильтрации

До сих пор речь шла в основном о движении однородной жидкости. Это тот раздел теории, который более всего разработан, допускает наиболее четкую формулировку задач и наиболее детальное их исследование. Вместе с тем это именно тот раздел теории нелинейной фильтрации, который полнее всего обеспечен экспериментальными данными.

В то же время, имея в виду потребности приложений и в первую очередь потребности теории разработки нефтяных и газовых месторождений, желательно рассмотреть и более сложный случай — движение неоднородных жидкостей и процессы вытеснения (замещения одной жидкостью другой). Почти полное отсутствие экспериментальных данных в этой области * заставляет строить теорию на основе общих соображений, аналогии с известными результатами теории для ньютоновских жидкостей и гипотез. Такой подход, несмотря на свою ограниченность, представляется оправданным, поскольку роль теории в рассматриваемых вопросах особенно велика ввиду их сложности.

§ 1. Уравнения совместного движения несмешивающихся вязко-пластических жидкостей

Для жидкостей, следующих линейному закону фильтрации, обобщение теории на случай совместного движения нескольких несмешивающихся жидкостей (фаз) обычно достигается следующим образом [177, 184, 231]. Вводятся два давления (для простоты допускаем, что имеется две не смешивающиеся между собой фазы) p_1 и p_2 , две скорости фильтрации w_1 и w_2 и насыщенность z порового пространства одной из фаз (например, первой, предполагаемой более смачивающий материал скелета пласта). Тогда движение описывается системой уравнений

$$w_j = - \frac{k f_j(s)}{\mu_j} \text{grad } p_j; \quad j = 1, 2; \quad (1.1)$$

* Имеющиеся экспериментальные данные [3, 41, 42, 96, 98, 119, 163, 169] до сих пор недостаточны для количественной проверки теории.

$$p_1 - p_2 = p_c(s); \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} w_j - (-1)^j m \frac{\partial s}{\partial t} = 0. \quad (1.3)$$

Здесь относительные фазовые проницаемости $f_j(s)$ и капиллярное давление $p_c(s)$ являются функциями насыщенности s . Предполагается, что вид относительных фазовых проницаемостей не зависит от свойств жидкостей и пористого скелета, а определяется лишь тем, какая из жидкостей обладает преимущественной смачиваемостью по отношению к материалу скелета. Для капиллярного давления имеет место зависимость

$$p_c(s) = \sigma \cos \theta \sqrt{\frac{m}{k}} J(s), \quad (1.4)$$

где $J(s)$ — безразмерная функция, называемая функцией Леверетта. В определенном диапазоне достаточно малых скоростей вытеснения $w = w_1 + w_2$ относительные фазовые проницаемости $f_j(s)$ и функция Леверетта не зависят от скорости. По данным Д. А. Эфроса [231], такая независимость наступает при значениях безразмерного параметра подобия $\Pi_1 = \sigma/\mu_2 w$, превосходящих 10^6 .

Таковы те основные элементы теории движения несмешивающихся жидкостей в пористой среде, которые можно считать в настоящее время общепринятыми и которые лежат в основе всех практических расчетов. Нетрудно видеть, что соответствующая теория может быть полностью выведена из двух основных предположений:

а) Благодаря действию капиллярных сил фазы в поровом пространстве распределяются таким образом, чтобы минимизировать свободную поверхностную энергию, т. е. более смачивающая фаза занимает мелкие капилляры, менее смачивающая фаза занимает остальную часть порового пространства.

Возникающие при движении жидкости гидродинамические силы в рассматриваемом диапазоне скоростей не в состоянии нарушить распределение фаз, обусловленное капиллярными силами.

б) Каждая из жидкостей движется в занимаемой ею части порового пространства таким образом, как если бы вторая фаза «отвердела» и представляла бы единое целое с твердым скелетом.

Надо сказать, что немалое число фактов свидетельствует о том, что и предположение а), и предположение б) имеют свою ограниченную область приложимости и вне ее нуждаются в уточнении. Важнейшее из этих уточнений связано с возможным влиянием гидродинамических сил на распределение фаз (т. е. с уточнением предположения а), описываемым безразмерным параметром Π_1 ; уточнение второго предположения связано в первую очередь с эффектами смазки, когда более смачивающая фаза обволакивает зерна скелета и способствует снижению сопротивления

движению менее смачивающей и более вязкой жидкости [261, 631]. Однако естественным первым шагом должно явиться обобщение существующей теории на неньютоновские среды. Ниже такое обобщение дается для основного случая вязко-пластических жидкостей.

1. По существу необходимое обобщение заключается в том, что указанные выше основные допущения а) и б) теории течения несмешивающихся жидкостей сохраняются в неизменном виде.

Таким образом, примем прежде всего, что распределение фаз в поровом пространстве в любой точке области фильтрации определяется капиллярными силами и не зависит от гидродинамических сил, связанных с движением жидкости. При этом процесс заполнения порового пространства предполагается однонаправленным (например, постепенное замещение нефти водой), и смачивающая жидкость занимает преимущественно поры меньшего радиуса.

На первый взгляд для вязко-пластических жидкостей, обладающих отличными от нуля предельными напряжениями сдвига τ_j , характер распределения фаз будет иным, поскольку пластическая жидкость будет заполнять наиболее узкие каналы и вытесняться из них с трудом. Однако это интуитивное рассуждение не учитывает истинного соотношения между пластическими напряжениями τ_j и капиллярными силами.

Обозначим через d характерный размер пор порового пространства — «внутренний масштаб» задачи *. Нарушение капиллярного равновесия приводит к появлению капиллярного скачка давления порядка σ/d . Величина капиллярного давления не зависит от размеров той области, в которой нарушено равновесие. С другой стороны, для любой жидкости, которая может быть добыта из пористой среды, сопротивление, оказываемое ею движению (сумма вязкого и пластического сопротивления), $\Delta p/L$ практически не может превышать 10^4 дин/см³ (1 ат/м) (чаще всего прикладываемые градиенты давления $\Delta p/L$ не превышают 10^3 дин/см³ (десять долей ат/м)).

Поскольку пластическое сопротивление движению (предельный градиент давления) имеет порядок

$$G \sim \tau/d, \quad (1.5)$$

получим оценку

$$\tau/d < \Delta p/L < 1 \text{ ат/м.}$$

Таким образом, для отдельного капилляра диаметром d и длиной l давление, необходимое для преодоления пластического сопротив-

* Следуя М. Д. Миллиончикову, за внутренний масштаб часто принимают величину $\sqrt{k/m}$. При этом для однородных сред $d = C\sqrt{k/m}$, причем коэффициент C может достигать нескольких десятков.

ления жидкости, составляет $\tau l/d = \alpha \tau$, где α — коэффициент удлиненности капилляра.

Пластическое сопротивление не сможет заметным образом повлиять на распределение фаз, если

$$\alpha \tau \ll \sigma/d; \quad \alpha \tau/d \ll \sigma/d^2. \quad (1.6)$$

При $d \sim 0,1$ мм = 0,01 см; $\sigma \sim 30$ дин/см справа в (1.6) стоит величина $\sim 3 \cdot 10^5$ дин/см² = 30 ат/м.

Таким образом, если не брать для α чересчур большие значения, условие (1.6) можно считать выполненным. Однако на него можно взглянуть и с другой стороны.

Заметим, что если бы речь шла не о роли пластической составляющей сопротивления, а о вязкой, то место соотношения (1.6) заняло бы соотношение

$$\frac{\alpha d \Delta p}{L} = \alpha d |\text{grad } p| = \frac{\alpha d \mu}{k} w \ll \sigma/d. \quad (1.7)$$

Неравенство (1.7) можно переписать также в виде

$$\Pi_1 = \frac{\sigma}{\mu w} \gg \frac{\alpha d^2}{k}. \quad (1.8)$$

Нетрудно видеть, что условие (1.8) — это указанное ранее условие автомодельности по параметру Π_1 . Таким образом, автомодельность наступает тогда, когда гидродинамические силы значительно меньше капиллярных. В правой части соотношения (1.8) стоит величина, имеющая порядок $10^3 \div 10^4$. Дело в том, что анализ данных по проницаемости показывает, что отношение d^2/k имеет порядок $10^2 \div 10^3$. То же заключение можно сделать и на основании известной полуэмпирической формулы Козени — Кармана. Что касается величины α , то о ней можно судить лишь косвенно. Некоторую информацию в этом отношении дают опыты по вытеснению остаточной нефти при повышении скорости прокачки воды [275], из которых следует, что остаточная нефть образует в порах удлиненные «островки» длиной примерно в десять поровых каналов. Таким образом, условие автомодельности по параметру Π_1 означает превышение капиллярных сил над гидродинамическими примерно на два порядка. Тем самым придается вполне простой физический смысл несколько неожиданному критическому значению параметра Π_1 ($\Pi_1 = 10^6$), указанному Д. А. Эфросом [231].

Обращаясь теперь к соотношениям (1.6) и (1.7), видим, что они имеют общую область применимости, а именно область не слишком высоких градиентов давления. Поэтому в том же асимптотическом смысле, в каком можно считать допущение а) справедливым для вязких жидкостей, его можно считать выполненным и для вязкопластических жидкостей. Что касается предположения б), то про-

верка его выполнимости путем каких-либо оценок вряд ли возможна и оно принимается по аналогии с соответствующим допущением теории течений несмешивающихся вязких жидкостей; его оправданием или подтверждением для конкретных двухжидкостных систем может служить эксперимент.

Если приняты предположения а) и б), то дальнейшее построение теории производится без особого труда. При каждой насыщенности порового пространства s каждая из фаз движется в занятой ею части порового пространства как в некоторой фиктивной пористой среде. Поэтому можно записать для каждой из фаз закон фильтрации с предельным градиентом [25, 26]

$$\begin{aligned} w_j &= -\frac{k f_j(s)}{\mu_j} \left[\text{grad } p_j - \frac{G_j}{|\text{grad } p_j|} \text{grad } p_j \right]; (|\text{grad } p_j| > G_j); \\ w_j &= 0 \quad (|\text{grad } p_j| \leq G_j). \end{aligned} \quad (1.9)$$

При этом, поскольку по мере увеличения насыщенности смачивающей фазой она последовательно заполняет вначале самые мелкие, а потом более крупные поры, средний размер пор, занятых как смачивающей фазой (d_1), так и несмачивающей фазой (d_2), монотонно возрастает с увеличением s (для первой от нуля до среднего размера пор скелета d , для второй — от d до некоторого максимального размера d^*). В соответствии с приведенной оценкой для G_j ($G_j \sim \tau_j/d_j$) величина предельного градиента для обеих фаз должна монотонно убывать с ростом насыщенности s , оставаясь для смачивающей фазы больше, а для несмачивающей — меньше значения для движения соответствующей однородной жидкости.

Уравнения (1.2), (1.3), (1.4) и (1.9) образуют систему уравнений феноменологической теории двухфазной фильтрации вязкопластических жидкостей. При этом функции $f_j(s)$, $J(s)$, $G_j(s)$, вообще говоря, должны определяться из эксперимента. Из общих соображений о соотношении между капиллярными силами и силами пластического сопротивления можно ожидать, что функция $J(s)$, входящая в выражение для капиллярного давления (1.4), не будет в первом приближении зависеть от наличия у жидкостей предельного напряжения сдвига. Этого нельзя сказать об относительных фазовых проницаемостях $f_j(s)$, поскольку при наличии пластического сопротивления часть капилляров может оказаться перекрытой пластическими пробками. Можно лишь утверждать, что качественно фазовые проницаемости ведут себя так же, как и для вязких жидкостей, т. е. проницаемость для несмачивающей фазы убывает с ростом s , а для смачивающей возрастает, причем существует некоторая минимальная насыщенность порового пространства данной фазой, до достижения которой данная фаза неподвижна

$$f_1(s) \equiv 0 \quad (s \leq s_*); \quad f_2(s) \equiv 0 \quad (s \geq s^*).$$

В работах [96, 166] была сделана попытка выяснить влияние предельного градиента на относительные фазовые проницаемости. Однако полученные результаты позволяют судить лишь о наличии зависимости остаточной насыщенности от предельного градиента и не позволяют определить фазовые проницаемости.

2. Рассмотрим теперь, опираясь на полученные выше уравнения, фронтальное вытеснение вязко-пластических жидкостей без учета капиллярного скачка давления. При этом $p_1 = p_2 = p(x, t)$ и движение описывается системой уравнений

$$w_1 = -\frac{k_{f1}(s)}{\mu_1} \frac{\partial p}{\partial x} \left(1 - \frac{G_1(s)}{\left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|} \right); \quad \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| > G_1;$$

$$w_1 = 0 \quad \left(\left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \leq G_1 \right); \quad (1.10)$$

$$w_2 = -\frac{k_{f2}(s)}{\mu_2} \frac{\partial p}{\partial x} \left(1 - \frac{G_2(s)}{\left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|} \right); \quad \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| > G_2;$$

$$w_2 = 0 \quad \left(\left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \leq G_2 \right);$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} + m \frac{\partial s}{\partial t} = 0; \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} - m \frac{\partial s}{\partial t} = 0. \quad (1.12)$$

Система (1.10) ÷ (1.12) является аналогом системы Баклея — Леверетта [19, 14] для вязких жидкостей и позволяет описать основной для приложений процесс — фронтальное вытеснение несмешивающихся жидкостей. Так же, как и уравнения теории двухфазной фильтрации вязких жидкостей, уравнения (1.10) неприменимы в тех областях, где насыщенность претерпевает резкие изменения. Такие области резкого изменения насыщенности отвечают фронту вытеснения, вблизи него капиллярные и гидродинамические силы сопоставимы по величине, и допущения а) и б) перестают быть справедливыми. Можно ожидать*, что вблизи фронта вытеснения само понятие фазовых проницаемостей становится сомнительным. Области резкого изменения насыщенности в дальнейшем из анализа исключаются.

Складывая уравнения (1.11) и (1.12), получим

$$w_1 + w_2 = w(t), \quad (1.13)$$

где $w(t)$ — суммарная скорость потока (скорость вытеснения). Полагая эту скорость постоянной, приходим к задаче Баклея — Леверетта о фронтальном вытеснении с постоянной скоростью. Задача эта хорошо изучена для вязких жидкостей [14, 19, 220].

* Это обстоятельство указано Г. И. Баренблаттом [15, 18].

Как будет показано ниже, наличие у жидкостей предельного напряжения сдвига (предельного градиента G_j в уравнениях закона фильтрации) приводит к ряду существенных особенностей.

Подставляя в уравнение (1.13) выражение (1.10), получим, считая для определенности $w \geq 0$, $\partial p / \partial x < 0$,

$$\begin{aligned} w = 0 & \quad \left(\left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \leq \min (G_1, G_2) \right); \\ w = -\frac{k f_l(s)}{\mu_l} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{k f_l(s)}{\mu_l} G_l & \quad \left(G_l < \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| < G_k \right); \quad (1.14) \\ (l = 1, \quad k = 2 \text{ при } G_1 < G_2; \quad l = 2, \quad k = 1 \text{ при } G_2 < G_1); \\ w = -k \left(\frac{f_1(s)}{\mu_1} + \frac{f_2(s)}{\mu_2} \right) \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{k f_1(s)}{\mu_1} G_1 - \frac{k f_2(s)}{\mu_2} G_2; \\ \left(\left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| > \max (G_1, G_2) \right). \end{aligned}$$

Выражая отсюда $\partial p / \partial x$ и подставляя в (1.10), получим при $G_1 < G_2$

$$\begin{aligned} w_1 = w & \quad \left(w \leq (G_2 - G_1) \frac{k f_1(s)}{\mu_1} \right); \\ w_1 = w \frac{f_1(s)}{f_1(s) + \mu f_2(s)} + \frac{k f_1(s) f_2(s)}{\mu_2 [f_1(s) + \mu f_2(s)]} (G_2 - G_1) & \quad (1.15) \\ (\mu = \mu_1 / \mu_2), \end{aligned}$$

при $G_1 \geq G_2$

$$\begin{aligned} w_1 = 0 & \quad \left(w \leq (G_1 - G_2) \frac{k f_2(s)}{\mu_2} \right); \\ w_1 = w \frac{f_1(s)}{f_1(s) + \mu f_2(s)} + \frac{k f_1(s) f_2(s)}{\mu_2 [f_1(s) + \mu f_2(s)]} (G_2 - G_1). & \quad (1.16) \end{aligned}$$

Аналогичные выражения для скорости второй фазы получаются заменой индексов.

Перепишем соотношения (1.15) и (1.16) в виде

$$w_1 = w F(s, \mu, w). \quad (1.17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F(s, \mu, w) &= F_0(s) \left[1 + \frac{k f_2(s)}{\mu_2 w} (G_2 - G_1) \right]; \quad (1.18) \\ F_0(s) &= \frac{f_1(s)}{f_1(s) + \mu f_2(s)}; \end{aligned}$$

$F_0(s)$ — обычная функция Баклея — Леверетта. Подставляя выражение (1.17) в уравнение неразрывности (1.11), получим уравнение

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + w F'_s \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad (1.19)$$

обычное в теории Баклея — Леверетта с тем, однако, важным отличием, что функция F'_s зависит от скорости вытеснения w . Уравнение (1.19) представляет собой квазилинейное уравнение первого порядка; свойства его решений определяются видом функции F . Поскольку каждое значение s насыщенности переносится вдоль характеристик уравнения (1.19) со своей скоростью, равной wF'_s/m , то основное значение имеет характер зависимости F от насыщенности s . Физически очевидно, что увеличение насыщенности s должно приводить при фиксированной скорости w к увеличению скорости первой фазы, так что $F'_s > 0$. Далее, при $s < s_*$ имеем заведомо $F \equiv 0$; при $s > s_*$ $F \equiv 1$. Таким образом, общий характер зависимости $F(s)$ остается таким же, как и для вязких жидкостей.

Однако появление в формуле (1.18) дополнительных членов по сравнению с обычным выражением для функции Баклея — Леверетта приводит к ряду особенностей. Зафиксируем значение w и построим графики зависимости от s функций F_0 и F . Пусть вначале $G_1 < G_2$, так что имеет место выражение (1.15). При $s < s_*$ имеем $f_1(s) \equiv 0$, и как F_0 , так и F равны нулю. Затем по мере увеличения s от s_* до значения s^0 , отвечающего равенству

$$\frac{\mu_1}{k} w = [G_2(s^0) - G_1(s^0)] f_1(s^0), \quad (1.20)$$

справедливо второе соотношение (1.15) и, поскольку добавочный член положителен, $F > F_0$.

В зависимости от соотношения параметров может оказаться, что $s^0 > s^*$, и тогда вплоть до $s = s^*$ справедливо второе соотношение (1.15) (кривая 1 на рис. 7.1), либо $s^0 < s^*$ и тогда, начиная с $s = s^0 < s^*$ имеем $F \equiv 1$, что означает неподвижность второй фазы (кривая 2 на рис. 7.1). Этот случай, как видно из (1.20), заведомо имеет место при малых скоростях вытеснения.

Величина $1 - \min(s^0, s^*)$ играет роль неснижаемой насыщенности пористой среды второй фазой. Таким образом, если идет вытеснение вязко-пластической жидкости (фаза 2) вязкой (фаза 1), как это имеет место при вытеснении нефти водой, величина неснижаемой нефтенасыщенности зависит от скорости вытеснения, оказываясь тем большей, чем меньше скорость.

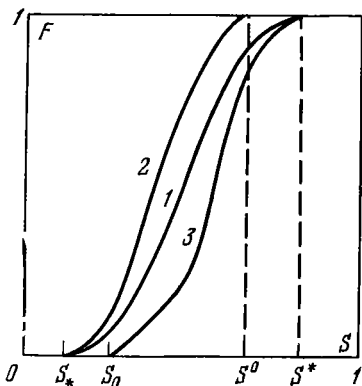


Рис. 7.1

Если $G_2 < G_1$, то имеет место обратная картина. При малых значениях s величина $f_2(s)$ в правой части первого неравенства (1.16) близка к единице и с ростом s уменьшается до нуля. Что касается величины $G_1(s)$, то она по оценке (1.3) и с учетом зависимости $d_1(s)$ неограниченно возрастает при $s \rightarrow 0$. Поэтому найдется такое значение насыщенности s_0 , зависящее от w , что при $s \leq s_0$

$$w \leq (G_1 - G_2) \frac{k f_2(s)}{\mu_2}$$

и первая фаза неподвижна. Очевидно, чем меньше скорость w , тем больше соответствующее ей значение насыщенности s_0 . При $s > s_0$ имеет место второе соотношение (1.16) (кривая 3 на рис. 7.1). Ввиду условия $G_2 < G_1$ скорость первой фазы будет все время меньше, чем для соответствующего случая Баклея — Леверетта.

Таким образом, если производится вытеснение вязко-пластической жидкостью (первая фаза) вязкой (вторая фаза), например вытеснение нефти или воды пеной, ведущей себя в пористой среде как вязко-пластическая жидкость, движение вытесняющей фазы начинается лишь по достижении насыщенности s_0 , которая при достаточно малых скоростях вытеснения может быть значительно выше той насыщенности s_* , при которой обращается в нуль фазовая проницаемость $f_1(s)$.

Нетрудно видеть, что при предельном переходе $w \rightarrow 0$, $s_0 \rightarrow s^*$, $s^0 \rightarrow s_*$ и F превращается в скачкообразную функцию. Применительно к задаче вытеснения это означает переход к квазипоршневому вытеснению, когда насыщенность принимает постоянные значения по обе стороны фронта вытеснения, на котором она изменяется скачком. При этом вытеснение с малыми скоростями наиболее эффективно при вытеснении вязких жидкостей вязко-пластическими и наименее эффективно при вытеснении вязко-пластических жидкостей вязкими.

Совершенно аналогично может быть рассмотрена задача о плоскорадиальном фронтальном вытеснении неньютоновских жидкостей. При этом, поскольку скорость вытеснения изменяется обратно пропорционально расстоянию r от источника, установленные выше зависимости показателя вытеснения от скорости непосредственно переходят в зависимости от r .

§ 2. Устойчивость фронтального вытеснения

Выше было показано, что уравнения двухфазной фильтрации сводятся к квазилинейному дифференциальному уравнению для определения насыщенности вытесняющей фазы, допускающему разрывное решение с образованием скачка насыщенности.

Устойчивость разрывного решения задачи Баклея — Леверетта, описывающей фильтрацию вязкой жидкости, хорошо изучена [19, 220, 177, 271, 93, 185]. Было обнаружено, что фронт вытес-

нения продвигается устойчиво, если подвижность вытесняющей фазы меньше подвижности вытесняемой

$$\frac{k_1}{\mu_1} < \frac{k_2}{\mu_2}.$$

Приведенный критерий устойчивости можно представить в несколько ином виде, получающемся, если поделить предыдущее условие на скорость фильтрации w

$$\frac{dp_2}{dx} > \frac{dp_1}{dx},$$

причем такое представление является более общим, так как включает критерий устойчивости вытеснения с учетом силы тяжести [271]. Как будет показано ниже, критерий устойчивости вытеснения с учетом предельного градиента имеет совершенно аналогичный вид.

1. Рассмотрим одномерное фронтальное вытеснение с предельным градиентом несмешивающихся жидкостей со скачком насыщенности на фронте вытеснения. Предположим, что за фронтом и перед ним насыщенность имеет постоянные значения s^+ и $s^- < s^+$ соответственно и фронт вытеснения перемещается в положительном направлении оси x с постоянной скоростью U , которая определяется выражением

$$U = \frac{w}{m} \frac{F(s^+) - F(s^-)}{s^+ - s^-}.$$

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ поверхность фронта вытеснения есть плоскость $x = 0$. Наложим на основное течение малые двумерные нестационарные возмущения, которые нарушают одномерность течения, постоянство насыщенности в соответствующих областях и искажают фронт вытеснения, который принимает вид

$$x = X(y, t), \quad (2.1)$$

где y — координата в невозмущенной плоскости фронта $x = 0$. Уравнения двумерной фильтрации (1.9) и неразрывности (1.3) в предположении малости возмущений в сравнении с основными величинами течения линеаризуются, а граничные условия на возмущенной поверхности фронта вытеснения (2.1), выражающие равенство давлений $p^+ = p^-$ и расходов

$$w_{1n}^+ - w_{1n}^- = mU_n(s^+ - s^-); \quad w_{2n}^+ - w_{2n}^- = mU_n(s^- - s^+)$$

(индексом « n » обозначены нормальные составляющие скоростей к поверхности скачка (2.1)), сносятя на невозмущенную поверхность фронта вытеснения $x_i^* = 0$.

Потребуем ограниченности возмущений в конечных точках плоскости и стремления их к нулю на бесконечности. Тогда для определения возмущений скоростей, давления, насыщенности

получим уравнения (возмущения обозначаются черточкой сверху, а основные величины индексом «0»)

$$\bar{w}_{jx} = -\frac{k}{\mu_j} \left\{ f_j(s_0) \frac{\partial p}{\partial x} + \bar{s} \left[f_j(s_0) G_j' + f_j'(s_0) \left(\frac{dp_0}{dx} + G_j \right) \right] \right\}; \quad (2.2)$$

$$\bar{w}_{jy} = -\frac{k}{\mu_j} f_j(s_0) \left[1 + \frac{G_j}{dp_0/dx} \right] \frac{\partial \bar{p}}{\partial y};$$

$$\frac{\partial \bar{w}_{jx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}_{jy}}{\partial y} - m(-1)^j \frac{\partial \bar{s}}{\partial t} = 0$$

с граничными условиями на невозмущенной поверхности фронта $x = 0$

$$\bar{w}_{1x}^+ - \bar{w}_{1x}^- = mU_0(\bar{s}^+ - \bar{s}^-) + mU(s_0^+ - s_0^-) = \bar{w}_{2x}^- - \bar{w}_{2x}^+; \quad (2.3)$$

$$\bar{p}^+ - \bar{p}^- = \bar{x} \left(\frac{dp_0^-}{dx} - \frac{dp_0^+}{dx} \right).$$

Подставим выражения для возмущений скоростей фильтрации в уравнения неразрывности в системе (2.2), исключим давление p и разложим возмущения в интеграл Фурье по y

$$\varphi(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_l(x, t) e^{iyl} dl, \quad (2.4)$$

где под φ подразумеваются возмущения, входящие в систему (2.2) — (2.3). Тогда получим следующие соотношения для определения компонент Фурье-преобразования (2.4):

$$\begin{aligned} w_{jlx} &= -\frac{k f_j(s_0)}{\mu_j} \frac{\partial p_l}{\partial x} - \left(\frac{dp_0}{dx} + G_j \right) k \frac{f_j'(s_0)}{\mu_j} s_l - \frac{k f_j(s_0)}{\mu_j} G_j' s_l; \\ w_{jly} &= -\frac{i k f_j(s_0) l'}{\mu_j \frac{dp_0}{dx}} \left(\frac{dp_0}{dx} + G_j \right) p_l; \\ p_l &= -\frac{1 + \frac{k f_1(s_0) G_1}{\mu_1 w} + \frac{k f_2(s_0) G_2}{\mu_2 w}}{l^2 \frac{k^2 f_2(s_0) f_1(s_0)}{\mu_1 \mu_2 \mu_1 w} (G_2 - G_1)} \left(\frac{w}{m} F'(s_0) \frac{\partial s_l}{\partial x} + \frac{\partial s_l}{\partial t} \right); \quad (2.5) \\ &\frac{\left(1 + \frac{k f_1(s_0) G_1}{\mu_1 w} + \frac{k f_2(s_0) G_2}{\mu_2 w} \right) \left(\frac{w}{m} F'(s_0) \frac{\partial^3 s_l}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 s_l}{\partial x^2 \partial t} \right)}{l^2 \frac{k f_2(s_0)}{\mu_2 w} (G_2 - G_1)} - \\ &- \frac{\frac{w}{m} F'(s_0) \frac{\partial s_l}{\partial x} + \frac{\partial s_l}{\partial t}}{\frac{k f_2(s_0)}{\mu_2 w} (G_2 - G_1)} + \frac{w}{m} \left(F(s_0) \frac{f_1'(s_0)}{f_1(s_0)} - F'(s_0) - \right. \\ &\left. - \frac{k f_1(s_0) G_1'}{\mu_1 w} \right) \frac{\partial s_l}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, задача фактически сводится к определению возмущений насыщенности из уравнения (2.5) с соответствующими граничными условиями.

Прежде чем записать граничные условия для Фурье-компоненты насыщенности s_l , сделаем следующее замечание. Известно, что скорость распространения возмущений определяется наклоном характеристик в плоскости (x, t) . Поэтому возмущения перед скачком распространяются со скоростью $w/m F'(s^-, \mu, w)$, а скорость фронта вытеснения U равна $w/m F'(s^+, \mu, w)$, и условием образования скачка насыщенностей является неравенство

$$F'(s^+, \mu, w) > F'(s^-, \mu, w),$$

в силу которого и образуется неоднозначность решения уравнения распределения насыщенности (1.19). Из этого неравенства следует, что в какой бы конечной точке перед скачком ни возникло возмущение, скачок, движущийся со скоростью U , за конечный отрезок времени догонит это возмущение, поскольку его скорость, равная $w/m F'(s^-, \mu, w)$, меньше скорости скачка, и «поглотит» его. Таким образом, выбирая соответственно начало отсчета времени, можно считать, что в области перед скачком возмущения отсутствуют, и исследовать распространение возмущений за фронтом вытеснения. Теперь граничные условия для Фурье-компоненты насыщенности s_l принимают вид

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \frac{k f_1(s_0^+) G_1}{\mu_1 w} + \frac{k f_2(s_0^+) G_2}{\mu_2 w}}{l^2 \frac{k^2 f_1(s_0^+) f_2(s_0^+)}{\mu_1 \mu_2 m w} (G_2 - G_1)} \left(\frac{w}{m} F'(s_0^+) \frac{\partial s_l}{\partial x} + \frac{\partial s_l}{\partial t} \right) = \\ & = x_l \left(\frac{d p_0^-}{dx} - \frac{d p_0^+}{dx} \right); \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \frac{k f_1(s_0^+) G_1}{\mu_1 w} + \frac{k f_2(s_0^+) G_2}{\mu_2 w}}{l^2 \frac{k f_2(s_0^+)}{\mu_2 w} (G_2 - G_1)} \left(\frac{w}{m} F'(s_0^+) \frac{\partial^2 s_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_l}{\partial x \partial t} \right) + \\ & + \frac{w}{m} \left(F(s_0^+) \frac{f_1'(s_0^+)}{f_1(s_0^+)} - F'(s_0^+) - \frac{k f_1(s_0^+) G_1'}{\mu_1 w} \right) s_l = \frac{dx_l}{dt} (s_0^+ - s_0^-). \end{aligned}$$

Применим преобразование Лапласа по t

$$\Phi_{l\omega} = \int_0^\infty \Phi_l(t) e^{-\omega t} dt$$

к уравнению (2.5) и граничным условиям (2.6). После введения обозначений

$$A(s_0^+) \equiv 1 + \frac{k f_1(s_0^+) G_1}{\mu_1 w} + \frac{k f_2(s_0^+) G_2}{\mu_2 w};$$

$$B(s_0^+) \equiv \frac{k f_2(s_0^+)}{\mu_2 w} (G_2 - G_1)$$

получим окончательно

$$\begin{aligned} & \frac{A(s_0^+)}{l^2 B(s_0^+)} \left(\frac{w}{m} F'(s_0^+) \frac{d^3 s_{l\omega}}{dx^3} + \omega \frac{d^2 s_{l\omega}}{dx^2} \right) - \\ & - \frac{1}{B(s_0^+)} \left(\frac{w}{m} F'(s_0^+) \frac{ds_{l\omega}}{dx} + \omega s_{l\omega} \right) + \\ & + \frac{w}{m} \left(F(s_0^+) \frac{f_1'(s_0^+)}{f_1(s_0^+)} - F'(s_0^+) - \frac{k f_1(s_0^+) G_1'}{\mu_1 w} \right) \frac{ds_{l\omega}}{dx} = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

при условиях на невозмущенном фронте вытеснения $x = 0$

$$- \frac{\mu_1 m A(s_0^+)}{l^2 k B(s_0^+) f_1(s_0^+)} \left(\frac{w}{m} F'(s_0^+) \frac{ds_{l\omega}}{dx} + \omega s_{l\omega} \right) = x_{l\omega} \left(\frac{dp_0^-}{dx} - \frac{dp_0^+}{dx} \right); \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{A(s_0^+)}{l^2 B(s_0^+)} \left(\frac{w}{m} F'(s_0^+) \frac{d^2 s_{l\omega}}{dx^2} + \omega \frac{ds_{l\omega}}{dx} \right) + \frac{w}{m} \left(F(s_0^+) \frac{f_1'(s_0^+)}{f_1(s_0^+)} - \right. \\ & \left. - F'(s_0^+) - \frac{k f_1(s_0^+) G_1'}{\mu_1 w} \right) s_{l\omega} = \omega x_{l\omega} (s_0^+ - s_0^-). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Решение уравнения (2.7) ищется в виде

$$s_{l\omega} = c e^{\beta x},$$

где β — корень характеристического многочлена

$$\begin{aligned} & \frac{\beta^2 A(s_0^+)}{l^2 B(s_0^+)} \left(\frac{w}{m} F'(s_0^+) \beta + \omega \right) - \frac{1}{B(s_0^+)} \left(\frac{w}{m} F'(s_0^+) \beta + \omega \right) + \\ & + \frac{w}{m} \beta \left(\frac{f_1'(s_0^+)}{f_1(s_0^+)} F(s_0^+) - F'(s_0^+) - \frac{k f_1(s_0^+) G_1'}{\mu_1 w} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из условия при $x \rightarrow -\infty$ следует, что $\text{Re } \beta > 0$. Найдем связь между каждым корнем характеристического уравнения (2.10) и соответствующими значениями ω . Для этого преобразуем граничные условия (2.7) — (2.8) к виду

$$\frac{\mu_1 m A(s_0^+)}{l^2 k B(s_0^+) f_1(s_0^+)} \left(\frac{w}{m} F'(s_0^+) \beta + \omega \right) = x_{l\omega} \left(\frac{dp_0^+}{dx} - \frac{dp_0^-}{dx} \right); \quad (2.11)$$

$$\frac{c\beta A(s_0^+)}{l^2 B(s_0^+)} \left(\frac{w}{m} F'(s_0^+) \beta + \omega \right) + \frac{cw}{m} \left(F(s_0^+) \frac{f_1'(s_0^+)}{f_1(s_0^+)} - F'(s_0^+) - \frac{k f_1(s_0^+) G_1'}{\mu_1 w} \right) = \omega x_{l\omega} (s_0^+ - s_0^-). \quad (2.12)$$

Из соотношений (2.11) — (2.12) с учетом (2.10) нетрудно получить выражение для

$$\omega = \frac{l^2 k f_1(s_0^+)}{m \mu_1 \beta A(s_0^+) (s_0^+ - s_0^-)} \left(\frac{d p_0^+}{dx} - \frac{d p_0^-}{dx} \right). \quad (2.13)$$

Поскольку $\operatorname{Re} \beta > 0$, из (2.13) немедленно следует, что возмущения убывают со временем ($\operatorname{Re} \omega < 0$), если выполняется условие

$$\frac{d p_0^+}{dx} - \frac{d p_0^-}{dx} < 0. \quad (2.14)$$

Для случая одномерного поршневого вытеснения, полагая $s_0^+ = 1$, $s_0^- = 0$, критерий устойчивости (2.14) преобразуем к виду

$$w \left(\frac{\mu_1}{k_1} - \frac{\mu_2}{k_2} \right) + G_1 - G_2 > 0, \quad (2.15)$$

из которого как частный случай при $G_1 = G_2 = 0$ следует известное условие устойчивости одномерного поршневого вытеснения вязких жидкостей.

Условие устойчивости (2.15) легко обобщается на случай фронтального вытеснения в наклонном пласте, когда необходимо учитывать влияние силы тяжести

$$w \left(\frac{\mu_1}{k_1} - \frac{\mu_2}{k_2} \right) + G_1 - G_2 + (\rho_1 - \rho_2) g \sin \alpha > 0;$$

здесь ρ — плотность жидкости, α — угол наклона пласта к горизонту, g — ускорение силы тяжести.

Наконец, отметим, что в нефтепромысловой практике часто используется вытеснение с применением промежуточного агента, когда, например, «поршень» из пены или другого хорошего вытеснителя проталкивается водой. В связи с этим представляет существенный интерес исследование такого «двойного» поршневого вытеснения. Допуская, что в невозмущенном движении имеются два параллельных фронта вытеснения (плоскости $x = 0$ и $x = L$), движущихся в направлении оси x с одинаковой скоростью, можно доказать, что движение устойчиво, если на каждой границе выполняется условие (2.14), и неустойчиво в противоположном случае. В частности, если вытеснение жидкостью 2 жидкостью 1 устойчиво, а между ними помещается слой жидкости 3, еще менее подвижной, чем жидкость 2, то устойчивость вытеснения нарушается.

§ 3. Некоторые примеры расчета процесса вытеснения*

Для оценки влияния предельного градиента на параметры вытеснения зависимость фазовых проницаемостей от насыщенности возьмем в виде [185]

$$f_1(s) = s^4; \quad f_2(s) = (1 + s)(1 - s)^3, \quad (3.1)$$

а μ — отношение вязкости воды μ_1 к вязкости нефти μ_2 — равным 0,2 и 0,4.

Некоторые сведения о зависимости $d_j(s)$ могут быть получены из анализа кривых распределения пор по размерам. Так, например, согласно [24] для песчаников месторождения Ромашкино (данные А. Ф. Богомоловой)

$$d_1 = d(0,47 + 0,53s); \quad d_2 = d(1 + 2,4s). \quad (3.2)$$

Результаты расчетов показателей вытеснения — зависимости насыщенности на фронте s_f и коэффициента вытеснения K_v (объемная доля вытесненной нефти) от параметра $\bar{u} = w\mu_2/kG_2$ (для плоско-радиального случая $\bar{u} = Q\mu_2/2\pi rkG_2$, $G_2 = \alpha\tau_{02}/d_2$ — величина предельного градиента для нефти, когда она полностью насыщает пористую среду) приведены на рис. 7.2.

Значения насыщенности на фронте и коэффициента вытеснения, определенные по теории Баклея — Леверетта, для $\mu = 0,2$ равны 0,65 и 0,82 соответственно, а для $\mu = 0,4$ —0,68 и 0,9. При этом если по теории Баклея — Леверетта скорость закачки не влияет на величину насыщенности на фронте, то в случае фильтрации с предельным градиентом влияние величины w может быть значительным. Так, при вытеснении вязко-пластичной нефти водой снижение скорости закачки воды ведет к существенному снижению полноты вытеснения нефти и, наоборот, при увеличении скорости полнота вытеснения приближается к величине, определяемой теорией Баклея — Леверетта.

Характерная зависимость показателей вытеснения от скорости проявляется не только в изменении конечной насыщенности, но и во всем ходе вытеснения. Решая уравнение (1.19) обычным образом, легко получить распределение насыщенности по длине образца (в зависимости от координаты x) при различных фиксированных скоростях вытеснения w и условиях

$$s(0, x) = 0; \quad s(t, 0) = \min(s^0, s^*), \quad (3.3)$$

т. е. решение задачи Баклея — Леверетта.

Распределение насыщенности по длине образца при вытеснении водой вязко-пластичной ($\bar{u} = 0,5$) и вязкой нефти ($\bar{u} = \infty$)

* К настоящему времени рассчитаны многие случаи вытеснения вязко-пластических нефтей водой, в том числе и весьма сложные. Результаты расчетов изложены в работах [33, 106, 107, 116, 117, 147, 148, 206, 207]. В основном они следуют тем же закономерностям, что и рассмотренные в тексте примеры.

приведено на рис. 7.3 для $\mu = 0,2$.

Учет капиллярных сил [206, 147, 148, 116, 117] не вносит качественных изменений в полученные выше результаты.

Чтобы исследовать устойчивость фронтального вытеснения для случая вытеснения вязкопластической нефти водой при приведенных выше фазовых проницаемостях и различных значениях соотношения вязкостей μ и параметра \bar{u} , преобразуем критерий устойчивости (2.14), используя (1.9) и (1.13), к виду

$$\frac{\bar{u} + \frac{f_2(s)}{a_2s + b_2}}{\frac{f_1(s)}{\mu} + f_2(s)} > \bar{u} + 1.$$

Здесь левая часть неравенства вычисляется при фронтальном значении насыщенности s_f , которая, в свою очередь, зависит от параметра \bar{u} (рис. 7.2). Для достаточно больших значений параметра \bar{u} ($\bar{u} \rightarrow \infty$) s_f определяется решением Баклея — Леверетта и практически от \bar{u} не зависит. Это позволяет приведенный критерий устойчивости считать зависящим от соотношения вязкостей μ и определить критическое значение μ_* , которое отделяет область возможных устойчивых движений фронта вытеснения при достижении достаточно большого значения параметра \bar{u} (или, что то же самое, скорости закачки) от области абсолютной неустойчивости фронта вытеснения (когда ни при каких сколь угодно больших скоростях закачки устойчивости добиться нельзя).

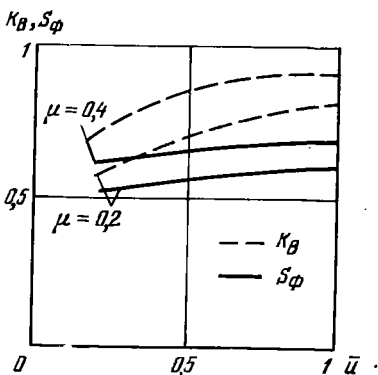


Рис. 7.2

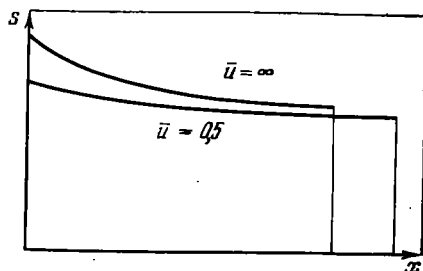


Рис. 7.3

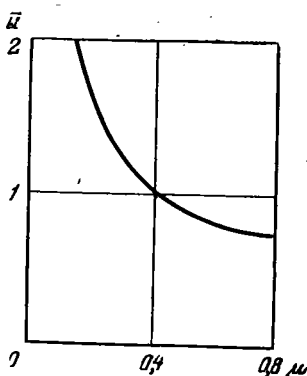


Рис. 7.4

Значение μ_* определяется из условия

$$\frac{f_1(s_\Phi)}{\mu_*} + f_2(s_\Phi) = 1,$$

где s_Φ вычисляется по теории Баклея — Леверетта. Решение этого уравнения дает $\mu_* = 0,13$, что хорошо согласуется с результатом, полученным в работах [93, 185].

Если $\mu < \mu_*$, движение фронта вытеснения всегда неустойчиво.

Если $\mu > \mu_*$, можно подобрать такую скорость закачки w , чтобы продвижение фронта было устойчивым. На рис. 7.4 приведена зависимость критического значения параметра \bar{y} от соотношения вязкостей μ , позволяющая для каждого μ определить то минимальное значение скорости закачки, начиная с которого фронт вытеснения продвигается устойчиво.

Таким образом, приведенные результаты показывают, что увеличение вязкости вытесняющего агента и в некоторых условиях скорости вытеснения приводит к стабилизации фронта вытеснения и увеличению коэффициента вытеснения, а тем самым и нефтеотдачи пластов. При плоско-радиальном вытеснении, когда вытесняющий агент закачивается в нагнетательную скважину, по мере удаления фронта от скважины насыщенность на фронте падает.

§ 4. Моделирование вытеснения вязко-пластической жидкости вязкой

В предыдущих параграфах выведены общие уравнения совместного течения двух жидкостей и рассмотрены основные элементы процесса вытеснения. Тем не менее остался неизученным наиболее сложный этап вытеснения — этап продвижения фронта вытеснения в том двумерном потоке, который создается в системе скважин. Даже для вязких жидкостей изучение этого этапа требует (за небольшим исключением) применения численных методов, к настоящему времени еще далеко не совершенных; еще сложнее обстоит дело при вытеснении вязко-пластической жидкости.

В этих условиях некоторые сведения можно получить, моделируя процесс вытеснения на щелевом лотке (лотке Хеле—Шоу). Поток вязко-пластической жидкости в зазоре щелевого лотка определяется известной формулой (δ — ширина зазора) [178]

$$w' = \frac{\delta^2 P}{12\mu'} \left(1 + \frac{\tau_0}{P\delta}\right) \left(1 - \frac{2\tau_0}{P\delta}\right)^2. \quad (4.1)$$

Здесь w' — модуль средней по сечению скорости; P — модуль градиента давления, направления векторов w' и P совпадают. При $P\delta \gg \tau_0$ имеем

$$w' \approx \frac{P\delta^2}{12\mu'} \left(1 - \frac{3\tau_0}{P\delta}\right). \quad (4.2)$$

Очевидно, далее

$$\operatorname{div} w' = 0. \quad (4.3)$$

Таким образом, осредненное по толщине зазора движение вязко-пластической жидкости описывается теми же уравнениями, что и плоское фильтрационное движение с нелинейным законом фильтрации вида (4.1), если под w' понимать модуль скорости фильтрации, а под P — модуль градиента давления. Асимптотическое соотношение (4.2) показывает, что асимптотически движение в зазоре моделирует фильтрацию с предельным градиентом. Практически удобнее не пользоваться расчетным соотношением (4.1), а непосредственно определять зависимость $w'(P)$ экспериментально (см. ниже). При этом оказывается, что для обычно используемых модельных жидкостей зависимость $w'(P)$ имеет вид

$$w' = \frac{P\delta^3}{12\mu} \left(1 - \frac{G'}{P}\right), \quad P > G'; \quad w' = 0, \quad P \leq G'. \quad (4.4)$$

в широком диапазоне скоростей, что позволяет использовать их для моделирования движений с предельным градиентом.

При установлении масштабов моделирования удобно взять в качестве основных величин геометрический размер (L и L' соответственно), скорость (w_0 и w'_0) и предельный градиент (G и G'). При этом имеем условия подобия

$$\frac{\mu w_0}{kG} = \frac{12w'_0\mu'}{\delta^2 G'}; \quad \frac{T'w'_0}{L'} = \frac{T w_0}{L}; \quad \frac{Q'_0}{w'_0 L'} = \frac{Q_0}{w_0 L} \quad (4.5)$$

(T — характерное время; Q_0 — характерный дебит на единицу мощности), а также очевидные условия геометрического подобия. Если рассматривается поршневое вытеснение вязко-пластической жидкости вязкой, то выполнение условия подобия (4.5) одновременно обеспечивает и подобие течений вязкой жидкости и (в силу совпадения условий на межфазной границе) подобие течений в целом.

При проведении экспериментов использовался горизонтальный щелевой лоток, жидкость в котором движется в зазоре между двумя листами оргстекла. Рабочая толщина зазора регулируется прокладками; в описываемых опытах толщина зазора была принята равной 1 мм. Источники и стоки (скважины) моделировались штуцерами, служащими для подвода и отвода жидкости.

Помещая в зазоре лотка резиновые прокладки, можно моделировать течение в областях достаточно произвольного вида.

Эксперименты по изучению вытеснения проводились для областей в форме квадрата с подачей и отбором жидкости в противоположных углах квадрата (моделирование вытеснения в пятиточечной схеме площадного заводнения) и прямоугольника с размещением источника и стока в серединах малых сторон (модели-



Рис. 7.5

рование вытеснения при рядном размещении скважин). Вначале выбранная область заполнялась рабочей жидкостью, моделирующей нефть, а затем начиналась подача вытесняющей вязкой жидкости при постоянном расходе. Фиксировался момент появления вытесняющей жидкости из «нагнетательной скважины», а затем периодически проводилось фотографирование картины вытеснения и замерялись количества жидкостей (вытесняющей и вытесняемой), отобранные из модели. Эксперимент прекращался после того, как через модель прошло достаточно большое количество жидкости и установилась стационарная картина расположения целиков.

Перед проведением вытеснения экспериментально снималась зависимость между расходом модельной смеси и градиентом давления в щели $w'(P)$. С этой целью был использован простейший щелевой вискозиметр с толщиной зазора 0,8 мм при длине рабочей части 51 см и ширине 2,6 см. Близость толщины зазора к толщине зазора в щелевом лотке (~ 1 мм) позволила получить зависимость $w'(P)$ в требуемом диапазоне скоростей. Это оказалось важным в том отношении, что используемые смеси не следуют строго соотношению Бингама—Шведова и их реологические параметры при аппроксимации этим соотношением оказываются разными в разных диапазонах скоростей. При всех количественных сопоставлениях использовались данные, относящиеся к малым скоростям.

Типичная картина вытеснения вязко-пластической жидкости показана на рис. 7.5 для случая рядной расстановки «скважин». Моделируется прямоугольный элемент течения, содержащий одну «нагнетательную скважину», через которую подается вытесняющая жидкость, и одну «эксплуатационную», через которую производится отбор. Характерно быстрое образование «языка» вытесняющей жидкости, прорывающегося в «эксплуатационную скважину», с последующим постепенным отмывом ободенных участков вытесняемой жидкости. Отмыв продолжается для-

тельное время (около последовательных кадров рис. 7.5 указаны суммарные объемы прошедшей жидкости, отнесенные к рабочему объему лотка), однако не заканчивается полностью, а приводит к образованию областей невытесненной жидкости — целиков; аналогичная картина имеет место и для квадратного элемента. Количественно ход вытеснения характеризуется зависимостями объема отобранной «нефти» от суммарного объема прокачанной жидкости. Важнейшим отличием от случая вытеснения вязких жидкостей является изменение вида указанной зависимости при изменении темпа вытеснения и появление некоторой предельной степени вытеснения, соответствующей образованию стабильных целиков.

Особенность целиков вязко-пластической жидкости состоит в том, что они, благодаря наличию предельного градиента, могут неограниченно долго сохранять свою форму. Те максимальных размеров целики, которые удовлетворяют этому условию, далее называются предельно-равновесными. Определение размеров и формы предельно-равновесных целиков позволяет оценить возможные потери нефти при вытеснении ее водой, и поэтому имеет большое прикладное значение. О некоторой недостаточности такого подхода подробнее будет сказано ниже.

§ 5. Целики и предельный коэффициент охвата при вытеснении вязко-пластических жидкостей вязкими

1. Допустим, что в ходе вытеснения вязко-пластической жидкости (нефти) вязкой (водой) образовались неподвижные области, занятые нефтью (целики) и граничащие либо с границами области движения D , либо с областью движения воды. При этом форма целиков является предельной в том смысле, что на границе нефть — вода градиент давления принимает предельное для нефти значение G и увеличение скорости движения воды повлечет за собой частичный размыв целиков. В области движения воды удовлетворяются уравнения фильтрации, следующей закону Дарси

$$w = - \frac{k}{\mu} \text{grad } p; \quad \text{div } w = 0. \quad (5.1)$$

Давление p должно удовлетворять обычным краевым условиям на внешней границе области движения и скважинах, а на границе целиков имеем два условия: условие непротекания

$$\partial p / \partial n = 0 \quad (5.2)$$

(n — направление нормали к границе) и условие предельного равновесия

$$|\partial p / \partial \tau| = G \quad (5.3)$$

(τ — направление по касательной к границе). Иными словами, давление p ищется как гармоническая функция в некоторой под-

области D' области течения D , удовлетворяющая обычным краевым условиям на общей части Γ'' границ Γ и Γ' областей D и D' , а на остальной части $\Gamma_* \{\Gamma'/\Gamma''\}$ границы области D' , удовлетворяющая двум условиям (5.2) и (5.3). Часть границы Γ_* является неизвестной, и лишнее условие на ней служит для ее отыскания.

Сформулированная задача весьма близка по постановке (но не по возникающим конкретным задачам) к задаче теории струй идеальной жидкости [104, 112, 192] и может решаться известными методами этой теории. Применительно к фильтрации с предельным градиентом эта задача была впервые рассмотрена в работе [8], но не как задача об определении размера щелей, а как приближенная постановка задачи об определении размеров застойных зон. В этой и последующей [6—9, 23, 194] работах приведены решения ряда конкретных задач. На возможность использования как постановки задач, так и имеющихся ее решений для определения размеров предельно-равновесных щелей указано в обзоре [177].

2. Общий прием решения плоской задачи об определении формы щелей заимствован из теории струй и состоит в следующем. В области движения воды вводится комплексный потенциал

$$W(z) = -H + i\psi, \quad (5.4)$$

где $H = kp/\mu$ — приведенный напор, ψ — функция тока, $z = x + iy$ — точка области D' . В большинстве рассматриваемых задач либо мнимая, либо действительная части комплексного потенциала известны, возможно, с точностью до нескольких констант на всей границе области D' или ее элемента симметрии. Вводится комплексная скорость

$$\omega(z) = \frac{dW}{dz} = we^{-i\theta}, \quad (5.5)$$

для которой на всей границе области D' (включая и неизвестную часть границы Γ_*) известны либо модуль w , либо угол θ с осью x . Затем ищется комплексный потенциал W в плоскости ω и получается дифференциальное уравнение

$$\omega = \frac{dW(\omega)}{dz}, \quad (5.6)$$

решение которого позволяет в принципе найти все характеристики течения; имея в виду приложения, чаще всего ограничиваются отысканием границ щелей. Границе щелей отвечает в плоскости ω линия $w = \lambda$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, причем на этой линии $\psi = \text{const}$.

Допустим теперь, что задача изменяется таким образом, что при неизменном значении функции тока ψ на неизвестной границе щелика происходит увеличение ψ в рассматриваемой области плоскости годографа скорости. Нетрудно видеть, повторяя с небольшими изменениями рассуждения гл. V, что такое изменение

функции ψ приведет к отодвиганию границы целиков от источников (расширению областей течения). Это позволяет строить и использовать для оценок по аналогии с предельными решениями для застойных зон предельные решения для целиков.

В качестве первого примера рассмотрим образование целиков вблизи цепочки равнодебитных скважин с дебитом Q на единицу мощности пласта, расположенной в неограниченном пласте. Расстояние между скважинами в цепочке составляет $2l$. В этом случае получаем задачу в плоскости годографа (w, θ)

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} \frac{\partial}{\partial w} w \frac{\partial \psi}{\partial w} + \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} &= 0, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad w \geq \lambda; \\ \psi &= 0 \quad \left(w = \lambda, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \quad \theta = 0, \quad \lambda \leq w < \infty; \right. \\ \theta &= \frac{\pi}{2}, \quad \lambda \leq w \leq a = \frac{Q}{4l} \Big); \\ \psi &= \frac{Q}{4} \quad \left(\theta = \frac{\pi}{2}, \quad a \leq w < \infty \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Решение этой задачи имеет вид [7, 68]

$$\begin{aligned} we^{-i\theta} &= i\lambda \frac{1 + a_0^2}{2a_0} \left(\sqrt{1 - \exp\left(-\frac{4\pi W}{Q}\right)} - \sqrt{\alpha^2 - \exp\frac{4\pi W}{Q}} \right); \\ \alpha &= \frac{a_0^2 - 1}{a_0^2 + 1}; \quad a_0 = \frac{a}{\lambda}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Для границы целика получаем дифференциальное уравнение

$$dz = -e^{i\theta} \frac{\partial \psi}{\partial w} \Big|_{w=\lambda} d\theta, \quad (5.9)$$

решение которого имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{z}{l} &= \frac{a_0^2 - 1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2a_0 \cos \theta}{a_0^2 - 1} - \frac{2a_0}{\pi} \cos \theta + \\ &+ i \left(\frac{1 + a_0^2}{2\pi} \ln \frac{1 + 2a_0 \sin \theta + a_0^2}{1 - 2a_0 \sin \theta + a_0^2} - \frac{2}{\pi} a_0 \sin \theta \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

На рис. 7.6 показано расположение границ целиков и зависимость площади целика S от параметра интенсивности потока $a_0 = Q/4\lambda l$. Естественно, что при $a_0 \rightarrow 1$ граница целика уходит в бесконечность, но площадь S имеет конечный предел, равный

$$S_\infty = 2l^2/\pi. \quad (5.11)$$

При $a_0 < 1$ решение (5.10) и (5.11) формально теряет смысл. В этом случае происходит естественное сужение области движения,

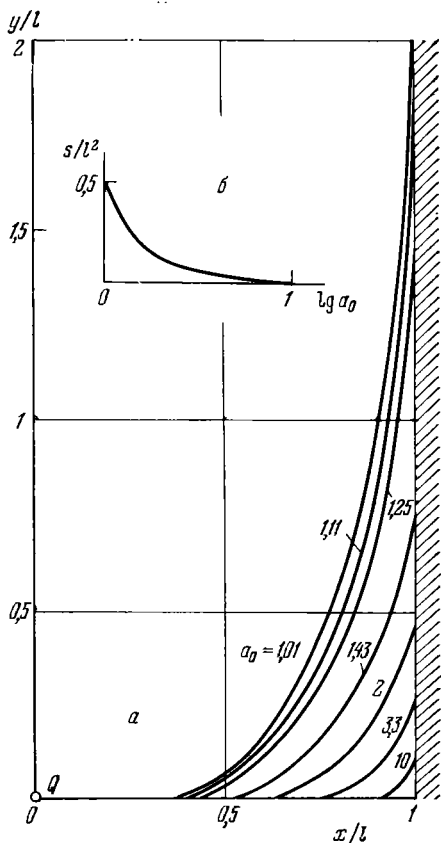


Рис. 7.6

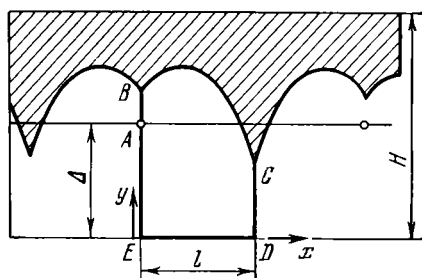


Рис. 7.7

так что вода прорывается по полосе шириной $l' = Q/4\lambda$, а целики состоят из полос шириной $l - l'$ и дополнительных областей, отвечающих $a_0 = 1$ и $l = l'$.

Пусть теперь цепочка скважин расположена между границей пласта и линией постоянного давления, причем давление на ней можно принять равным нулю ввиду инвариантности уравнений фильтрации относительно сдвига по p . Предполагается, что граница целиков, образующихся между цепочкой скважин и границей пласта, не пересекается с последней. В силу симметрии достаточно рассмотреть область $ABCDE$ (рис. 7.7).

В плоскости годографа (w, θ) ищется аналитическая функция W , удовлетворяющая следующим граничным условиям:

$$\text{Im } W = Q/2$$

$$(\theta = -\pi/2, \quad w_E < w < \infty);$$

$$\text{Re } W = 0$$

$$(\theta = -\pi/2, \quad w_D < w < w_E);$$

$$\text{Im } W = 0$$

$$(\theta = -\pi/2, \quad \lambda < w < w_D);$$

$$-\pi/2 < \theta < \pi/2, \quad w = \lambda;$$

$$\theta = \pi/2, \quad \lambda < w < \infty).$$

Конформное преобразование

$$\omega = -i\lambda \left(d - \frac{1}{\eta} + \sqrt{\left(d - \frac{1}{\eta} \right)^2 - 1} \right)$$

отображает верхнюю полуплоскость комплексного переменного η на плоскость годографа ω

так, что осуществляется соответствие точек

$$\eta_A \leftrightarrow 0, \quad \eta_B \leftrightarrow \frac{1}{d-1}, \quad \eta_C \leftrightarrow \frac{1}{d+1}, \quad \eta_D \leftrightarrow \infty, \quad \eta_E \leftrightarrow e.$$

Параметры d и e связаны со значениями скорости в точках D и E соотношениями

$$d = -0,5(w_D/\lambda + \lambda/w_D), \quad 1/e = d + 0,5(w_E/\lambda + \lambda/w_E).$$

Аналитическая функция W , удовлетворяющая на действительной оси ξ плоскости η условиям

$$\operatorname{Im} W = 0, \quad -\infty < \xi < 0;$$

$$\operatorname{Im} W = Q/2, \quad 0 < \xi < e;$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{Im} W = 0, \quad e < \xi < \infty,$$

имеет вид

$$W = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{e-\eta} + \sqrt{e}}{\sqrt{e-\eta} - \sqrt{e}}. \quad (5.12)$$

Координаты границы целика с точностью до постоянных определяются соотношениями в параметрической форме

$$\begin{aligned} \frac{x}{l} &= \frac{Q \sqrt{e}}{2\pi\lambda l} \int_{1/(1+d)}^{\xi} \sqrt{1 - \left(d - \frac{1}{\xi}\right)^2} \frac{d\xi}{\xi \sqrt{e-\xi}}; \\ \frac{y}{\Delta} &= \frac{Q \sqrt{e}}{2\pi\lambda \Delta} \int_{1/(1+d)}^{\xi} \left(d - \frac{1}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi \sqrt{e-\xi}}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Для определения постоянных необходимо удовлетворить условию

$$x = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 1/(d-1)$$

и определить расстояние AB от скважины до вершины границы целика

$$\frac{AB}{\Delta} = \frac{Q \sqrt{e}}{2\pi\lambda \Delta} \int_{1/(d-1)}^0 \left(d - \frac{1}{\xi} - \sqrt{\left(d - \frac{1}{\xi}\right)^2 - 1}\right) \frac{d\xi}{\xi \sqrt{e-\xi}}. \quad (5.14)$$

Для определения параметров d и e воспользуемся тем, что известны расстояния l и Δ и дебит каждой скважины, при этом получаем уравнения

$$\begin{aligned} \sqrt{e} \int_0^e \left(d - \frac{1}{\xi} + \sqrt{\left(d - \frac{1}{\xi}\right)^2 - 1}\right) \frac{d\xi}{\xi \sqrt{e-\xi}} &= \frac{2\pi\lambda \Delta}{Q}; \\ \sqrt{e} \int_e^\infty \left(d - \frac{1}{\xi} + \sqrt{\left(d - \frac{1}{\xi}\right)^2 - 1}\right) \frac{d\xi}{\xi \sqrt{\xi - e}} &= \frac{2\pi\lambda l}{Q}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

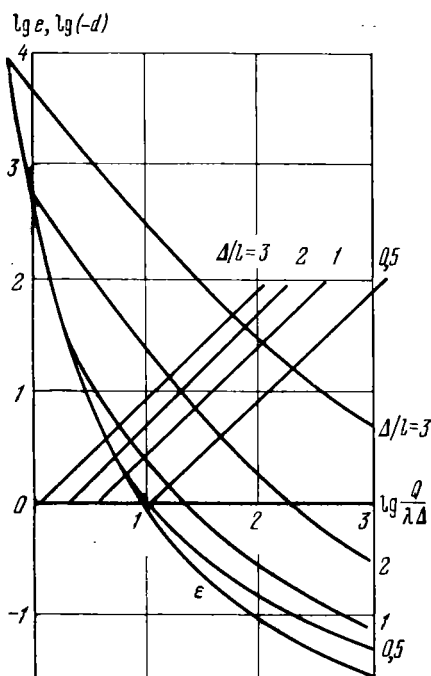


Рис. 7.8

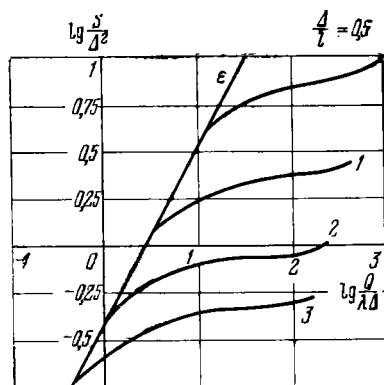


Рис. 7.9

Если параметр $d = -1$, то отсутствует интерференция скважин в цепочке и течение разбивается на совокупность течений, создаваемых невзаимодействующими парами источников и стоков. Подставляя $d = -1$ в (5.13), интегрируя и производя замену

$$e = 0,5 \left(\frac{1 - \sigma^2}{2\sigma} \right)^2;$$

$$\xi = - \frac{(1 - \sigma^2)^2 \omega^4 + \sigma^2 (\sigma^2 + \omega^2)^2}{2\sigma^2 (\sigma^2 - \omega^2)^2},$$

получаем соотношения, приведенные в работе [8] для системы источник — сток.

Относительно уравнений (5.15) необходимо заметить следующее. Поскольку эти уравнения не удастся разрешить относительно d и e , то при расчетах по параметрам d и e были определены численно значения $Q/\lambda l$ и $Q/\lambda \Delta$. Затем были построены зависимости параметров d и e от безразмерной комбинации $Q/\lambda \Delta$ для различных значений отношения Δ/l (рис. 7.8) (прямые — $\lg(-d)$). На рис. 7.8 приведена также предельная кривая (ϵ), соответствующая зависимости параметра e от $\theta/\lambda \Delta$ для случая источник — сток ($d = -1$).

Выясним зависимость коэффициента охвата β от геометрии установки скважин и их дебита. Коэффициент охвата β определяется как доля площади пласта, занятая водой, $\beta = S/lH$, и вычисляется по формуле

$$\beta = \frac{S}{\Delta^2} \cdot \frac{\Delta}{H} \cdot \frac{\Delta}{l}. \quad (5.16)$$

Здесь S/Δ^2 определяется из решения задачи, Δ/H характери-

зует геометрию расстановки цепочки скважин в пласте, а Δ/l характеризует соотношение между плотностью скважин в цепочке и расстоянием между цепочкой и линий постоянного давления. Зависимость S/Δ^2 от параметров $Q/\lambda l$, $Q/\lambda \Delta$ и Δ/l приведена на рис. 7.9, 7.10. На рис. 7.10 приведена зависимость S/Δ^2 от параметра $Q/\lambda l$ при изменении только расстояния l между скважинами. Кривая ϵ на этом графике соответствует тем значениям l , при которых границы цепочек от обоих рядов смыкаются и реализуется случай источник — сток. Эти значения $l = l_1$ в зависимости от параметра $Q/\lambda \Delta$ приведены на рис. 7.11. Дальнейшее увеличение расстояния l между скважинами, ввиду отсутствия интерференции скважин в цепочке, не влияет на величину S/Δ^2 . Влияние Q на коэффициент охвата β выясняется непосредственно из графика рис. 7.9. При заданных значениях l и Δ увеличение дебита Q скважин ведет к увеличению коэффициента охвата β .

При этом оказывается, что уменьшение расстояния Δ при заданных значениях Q , H и l ведет к существенному уменьшению коэффициента охвата за счет того, что увеличивается доля площади пласта между границей залежи и цепочкой, не охваченная заводнением. Напротив, располагая цепочку возможно ближе к границе залежи, можно значительно уменьшить потери нефти в пласте, связанные с наличием предельного градиента.

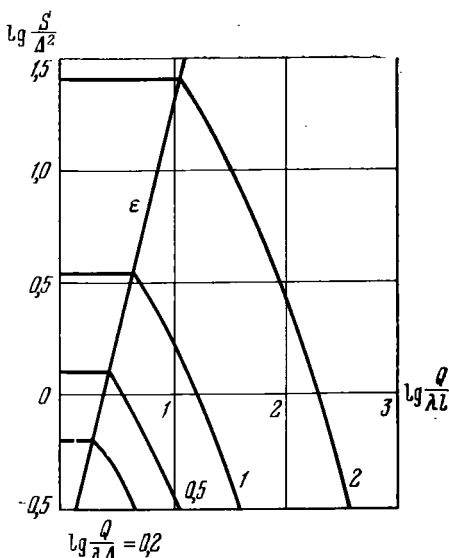


Рис. 7.10

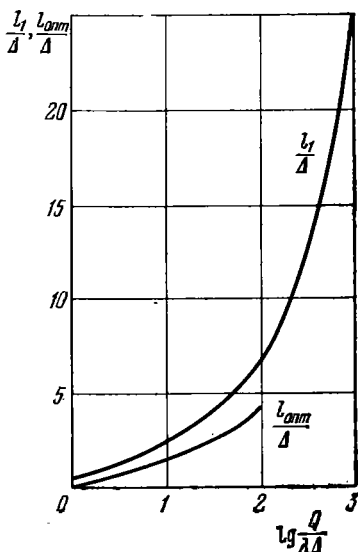


Рис. 7.11

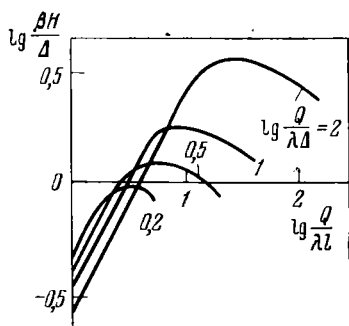


Рис. 7.12

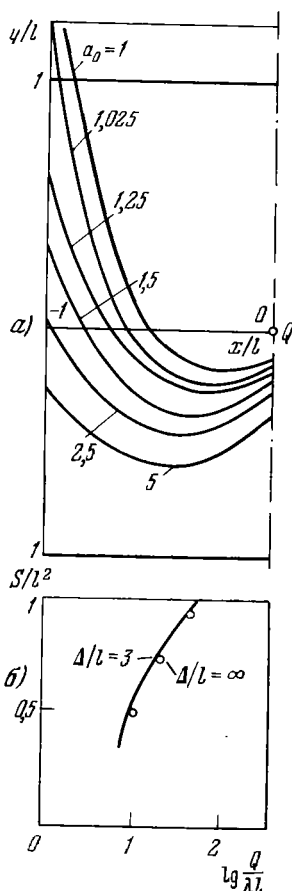


Рис. 7.13

Перейдем теперь к вопросу о влиянии расстояния между скважинами в цепочке на коэффициент охвата β .

Прологарифмировав выражение (5.16) для коэффициента охвата β , получим с учетом того, что $\frac{\Delta}{l} = \left(\frac{Q}{\lambda l}\right) / \left(\frac{Q}{\lambda \Delta}\right)$

$$\lg \beta = \lg \frac{S}{\Delta^2} + \lg \frac{Q}{\lambda l} - \lg \frac{Q}{\lambda \Delta} + \lg \frac{\Delta}{H}. \quad (5.17)$$

При изменении l в правой части соотношения (5.17) меняются лишь первые два слагаемых, а остальные остаются постоянными. Поэтому приведенная на рис. 7.12 зависимость лишь постоянным коэффициентом, равным H/Δ , отличается от β . Пользуясь графиком (рис. 7.12), нетрудно выяснить влияние плотности скважин в цепочке (величины l) на коэффициент охвата β . Поведение кривых на рис. 7.12 указывает на существование оптимального расстояния $l_{\text{опт}}$, при котором коэффициент охвата имеет максимальное значение. Зависимость $l_{\text{опт}}/\Delta$ от параметров разработки приведена на рис. 7.11.

Если Δ устремить к бесконечности, то выражение для координат границы целика примет вид

$$\begin{aligned} \frac{x}{l} = \frac{Q}{2\pi\lambda l} & \left(m \arcsin t - \sqrt{m^2 - 1} \arcsin \frac{1 - mt}{t - m} - \sqrt{1 - t^2} - 0,5\pi(m - \sqrt{m^2 - 1}) \right); \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\frac{y}{l} = \frac{Q}{2\pi\lambda l} \left(t - 1 - m \ln \frac{m-1}{m-t} \right);$$

$$m = 0,25 \left(\frac{Q}{\lambda l} + \frac{\lambda l}{Q} \right); \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Рассчитанные положения границ целиков и зависимость их площади от интенсивности потока $a_0 = Q/2\lambda l$ представлены на рис. 7.13. Так же, как и в предыдущем случае, при $a_0 < 1$ происходит автоматическая «подстройка» течения к решению при $a_0 = 1$ с образованием бесконечных целиков-полос и «коридоров»

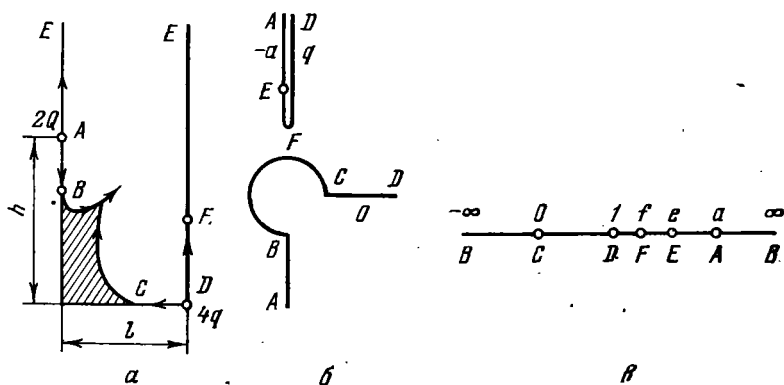


Рис. 7.14

вытеснения. Подобно застойным зонам целики резко увеличиваются при переходе от сравнительно благоприятной (симметрично-рядной) схемы расстановки скважин (рис. 7.4) к неблагоприятной схеме с резким поворотом потока вблизи непроницаемой границы. Различие в размерах целиков тем больше, чем больше скорость вытеснения; при малых скоростях вытеснения основную роль начинает играть образование целиков-полос между соседними скважинами, и различие между схемами вытеснения уменьшается. При наличии нескольких рядов скважин задача усложняется; с точки зрения практического применения полученных решений важно знать, когда влиянием соседних рядов можно пренебречь. В данном случае некоторые выводы можно сделать, сопоставляя (рис. 7.13, б) площади целиков, образующихся вблизи непроницаемого экрана в бесконечном пласте (точки) и при наличии на расстоянии $\Delta = 3l$ галереи (сплошная линия). Видно, что в этом случае галереею можно считать бесконечно удаленной.

В качестве следующего, более сложного примера рассмотрим течение в системе трех рядов скважин (рис. 7.14). Имеем в плоскости комплексной скорости $\omega = we^{-i\theta}$ задачу, представленную на рис. 7.14.

Комплексный потенциал W представляет собой аналитическую функцию ω в области $|\omega| > \lambda$, $0 \leq \theta \leq 3\pi/2$ с разрезом вдоль луча $|\omega| > a = (q + Q)/l$, $\theta = \pi/2$ при условиях (рис. 7.14, б)

$$\operatorname{Im} W = 0, \quad w = \lambda, \quad \theta = \pi/2, \quad \theta = 3\pi/2; \quad (5.19)$$

$$\operatorname{Im} W = q \text{ на } DFE; \quad \operatorname{Im} W = -Q \text{ на } AE.$$

Отображение

$$\omega = \lambda \left(\frac{1 + V\bar{\eta}}{1 - V\bar{\eta}} \right)^{1/2} \frac{V\bar{d} + V\bar{\eta}}{V\bar{d} - V\bar{\eta}}; \quad \omega(\infty) = -i\lambda \quad (5.20)$$

переводит рассматриваемую область в верхнюю полуплоскость η при соответствии точек, показанном на рис. 7.14, в. При этом для координаты f образа точки F имеем

$$f = (d + 2\sqrt{d})/(1 + 2\sqrt{d}). \quad (5.21)$$

Параметр d должен определяться особо (см. ниже). В полуплоскости $\operatorname{Im} \eta > 0$ должна быть определена аналитическая функция W , причем на действительной оси

$$\operatorname{Im} W = 0; \quad \eta < 1 \text{ и } \eta > d;$$

$$\operatorname{Im} W = q; \quad 1 < \eta < e;$$

$$\operatorname{Im} W = -Q; \quad e < \eta < d.$$

Откуда

$$W = \frac{q}{\pi} \ln \frac{e - \eta}{1 - \eta} - \frac{Q}{\pi} \ln \frac{d - \eta}{e - \eta}. \quad (5.22)$$

Имеем далее для координат физической плоскости

$$dz = \left(\frac{1 - V\bar{\eta}}{1 + V\bar{\eta}} \right)^{1/2} \frac{V\bar{d} - V\bar{\eta}}{V\bar{d} + V\bar{\eta}} \left(\frac{q(e - 1)}{\pi\lambda(e - \eta)(1 - \eta)} - \frac{Q(d - e)}{\pi\lambda(d - \eta)(e - \eta)} \right) d\eta. \quad (5.23)$$

Граница целика соответствует отрицательной действительной полуоси ($\eta \leq 0$), и ее уравнение с точностью до сдвига определяется соотношением (5.23), если в нем считать η отрицательным действительным числом. Геометрия задачи в физической плоскости будет вполне определена, если задать еще положения источников относительно целика. Имеем далее

$$|\omega(e)| = \frac{q + Q}{\lambda l} = u_0 = \left(\frac{1 + V\bar{e}}{V\bar{e} - 1} \right)^{1/2} \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}, \quad d = \alpha^2 e. \quad (5.24)$$

Таким образом, α , а потому и d можно выразить в виде функции от e (при данном u_0). При фиксированном u_0 значение e находится по известному расстоянию h между соседними рядами скважин.

Используя (5.23), получим для этого расстояния

$$h = y(B) + AB;$$

$$\frac{y(B)}{l} = \frac{u_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2 \sqrt{\eta d} + \sqrt{\eta} (d + \eta)}{\sqrt{1 + \eta} (d + \eta)} \left(\frac{Q^* (d - e)}{(d + \eta)(e + \eta)} - \frac{q^* (e - 1)}{(1 + \eta)(e + \eta)} \right) d\eta; \quad (5.25)$$

$$\frac{AB}{l} = \frac{u_0}{\pi} \int_d^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\eta} - 1}{\sqrt{\eta} + 1} \right)^{1/2} \frac{\sqrt{\eta} - \sqrt{d}}{\sqrt{\eta} + \sqrt{d}} \left(\frac{Q^* (d - e)}{(d - \eta)(e - \eta)} - \frac{q^* (e - 1)}{(1 - \eta)(e - \eta)} \right) d\eta;$$

$$q^* = q/(Q + q); \quad Q^* = Q/(Q + q).$$

Отметим, что наибольший интерес представляют значения u_0 , близкие к единице. При этом из (5.23) получаем $e \gg 1$ (так, $u_0 = 1,1$ достигается лишь при $e > 100$). В этом случае из (5.25) получаем

$$\frac{AB}{l} \approx \frac{u_0}{\pi} (Q^* J_3 + q^* J_4); \quad \frac{y(B)}{l} \approx \frac{u_0}{\pi} (Q^* J_1 - q^* J_2), \quad (5.26)$$

где

$$J_1(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{[2 \sqrt{\eta d} + \sqrt{\eta} (d + \eta)] (d - e)}{\sqrt{1 + \eta} (e + \eta) (d^2 - \eta^2)} d\eta;$$

$$J_2(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{[2 \sqrt{\eta d} + \sqrt{\eta} (d + \eta)] (e - 1)}{(d + \eta)(e + \eta)(1 + \eta)^{3/2}} d\eta;$$

$$J_3(\alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e - d}{(e - \eta) (\sqrt{\eta} + \sqrt{d})^2} d\eta;$$

$$J_4(\alpha) = \int_{\sqrt{d}}^{\infty} \frac{e}{\eta (e - \eta)} d\eta.$$

На рис. 7.15 показана зависимость между \sqrt{d} и α , определяемая соотношением (5.24), для нескольких значений u_0 , указанных цифрами около кривых. Используя эту связь, можно построить зависимости интегралов J_i от параметра α (рис. 7.16).

При заданных u_0 , q^* и Q^* имеем

$$\frac{h}{l} = \frac{u_0}{\pi} (Q^* (J_1 + J_3) - q^* (J_2 - J_4)), \quad (5.27)$$

что позволяет по h/l определить α , а затем по графикам рис. 7.15 и \sqrt{d} , после чего решение оказывается вполне определенным. Так, конфигурация рис. 7.14, а соответствует случаю $q = Q = 1$,

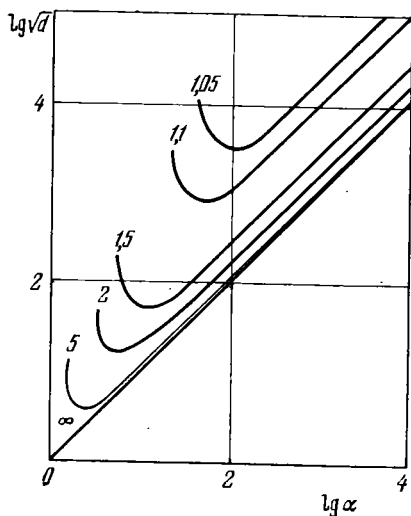


Рис. 7.15

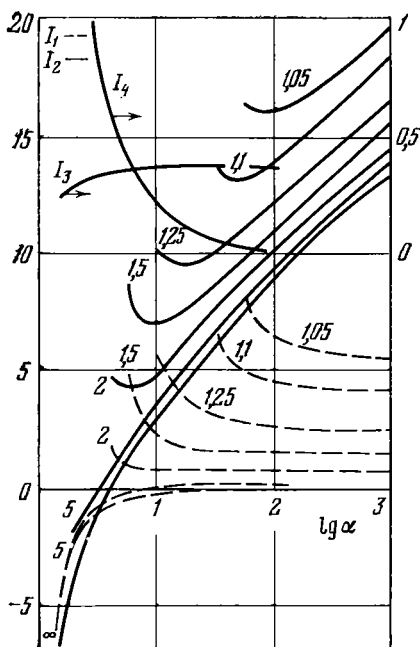


Рис. 7.16

$u_0 = 2,1$, $h/l = 1,47$; граница целика рассчитана изложенным выше методом и показана в масштабе.

Кроме рядной системы расстановки скважин, при которой нагнетательные и эксплуатационные скважины располагаются рядами (см. рассмотренные выше примеры), часто встречается также площадная система заводнения; схематически она соответствует тому, что пласт в плане покрывается сеткой правильных n -угольников, в центрах которых располагаются нагнетательные скважины, а в вершинах — эксплуатационные. Такая схема расстановки скважин называется $(n + 1)$ -точечной.

Рассмотрим течение в элементе симметрии пятиточечной схемы заводнения (рис. 7.17, а). В плоскости ω ищется аналитическая функция W , при следующих граничных условиях:

$$\operatorname{Im} W = 0; \quad \theta = 0,$$

$$\lambda < w < \infty; \quad -\frac{1}{2}\pi < \theta < 0,$$

$$w = \lambda;$$

$$\theta = -\frac{1}{2}\pi, \quad \lambda < w < \infty;$$

$$\operatorname{Im} W = Q/8; \quad \theta = -\frac{\pi}{4},$$

$$w_E < w < \infty.$$

Конформное преобразование

$$\omega = \lambda \left[\frac{(1 - \sqrt{\eta})(\sqrt{d} - \sqrt{\eta})}{(1 + \sqrt{\eta})(\sqrt{d} + \sqrt{\eta})} \right]^{1/4} \quad (5.28)$$

переводит верхнюю полуплоскость комплексного переменного η на плоскость ω при соответствии точек, указанном на

рис. 7.17, б. Функция W имеет вид

$$W = \frac{Q}{8\pi} \ln \frac{d-\eta}{1-\eta}. \quad (5.29)$$

Координаты границы целика с точностью до постоянных определяются соотношением

$$\frac{z}{l} = \frac{Q(1-d)}{8\pi\lambda l}.$$

$$\int_0^{\xi} \left[\frac{(1 - \sqrt{\xi})(\sqrt{d} - \sqrt{\xi})}{(1 + \sqrt{\xi})(\sqrt{d} + \sqrt{\xi})} \right]^{1/4} \times \\ \times \frac{d\xi}{(1-\xi)(d-\xi)};$$

$$\xi = \operatorname{Re} \eta < 1. \quad (5.30)$$

Постоянные определяются из условий

$$\frac{x}{l} \rightarrow 1 \text{ при } \xi \rightarrow -\infty;$$

$$y \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow 0, \quad (5.31)$$

а параметр d — по известному расстоянию между скважинами

$$\frac{Q\sqrt{2}(d-1)}{16\pi\lambda l} \cdot \int_1^d \left[\frac{(\sqrt{\xi}-1)(\sqrt{d}-\sqrt{\xi})}{(\sqrt{\xi}+1)(\sqrt{d}+\sqrt{\xi})} \right]^{1/4} \times \\ \times \frac{d\xi}{(d-\xi)(\xi-1)} = 1. \quad (5.32)$$

Границы целиков и зависимость предельного коэффициента охвата пласта заводнением β для различных значений безразмерного параметра $Q/\lambda l$ показаны на рис. 7.18.

Естественным обобщением предыдущей задачи является случай расстановки скважин по прямоугольной сетке [74]. Данная задача является одним из частных случаев более общей за-

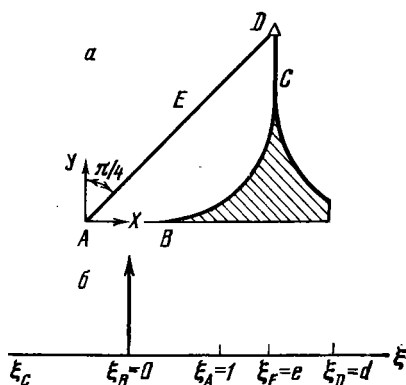


Рис. 7.17

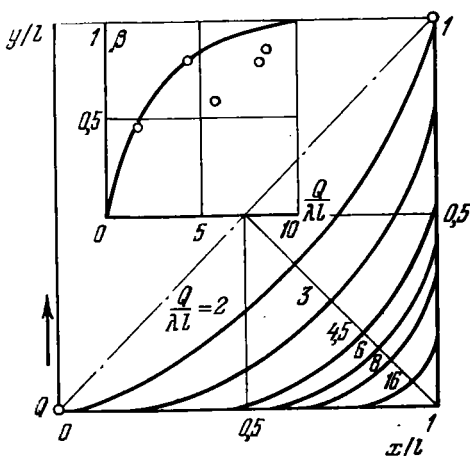


Рис. 7.18

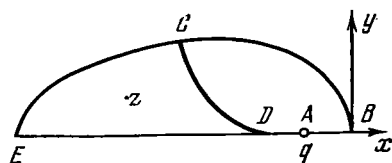


Рис. 7.19

дачи, рассмотренной в главе VI, и сводится к отысканию аналитической функции на двулистной римановой поверхности переменного годографа. Эта аналитическая функция выражается через вспомогательную неизвестную функцию, являющуюся решением краевой задачи в однолистной области. Известными методами [40, 150] эта задача решается эффективно. В работе [74] подробно обследован асимптотический случай малых интенсивностей потока и приведены зависимости определяющих параметров в плоскости годографа от физических параметров.

В заключение этого раздела рассмотрим задачу о предельно-равновесной конфигурации границы целиков CD в области, ограниченной криволинейным симметричным относительно оси x контуром постоянного (равного нулю) давления BCE (рис. 7.19). Начало координат принимается в точке B . Задачи такого типа впервые рассмотрены Л. М. Котляром и Э. В. Скворцовым [103]; ниже излагается предложенный ими способ решения, опирающийся на методы теории струй [192]. Область течения в физической плоскости z конформно отображается на внутренность полукруга в верхней полуплоскости комплексного переменного t так, что граница целика CD переходит в действительный диаметр ($-1 \leq \leq \operatorname{Re} t \leq 1$), а контур постоянного давления — в полуокружность. В плоскости t определяется комплексный потенциал потока

$$W(t) = \frac{q}{\pi} \ln \frac{t^2 + a^2}{1 + t^2 a^2}, \quad (5.33)$$

где a — координата стока в плоскости t . Комплексная скорость течения представляется в виде

$$\zeta(t) = \chi(t) e^{-i\Omega(t)}, \quad (5.34)$$

здесь $\chi(t)$ — комплексная скорость, учитывающая наличие особенностей в потоке, — решение задачи об источнике и стоке

$$\chi(t) = \frac{(t + ia)(t + i/a)}{(t - ia)(t - i/a)}. \quad (5.35)$$

Неизвестная функция $\Omega(t) = \theta + i\tau$ — аналитическая, регулярная внутри полукруга, принимающая действительные значения при $\operatorname{Re} t = 0$. Используя принцип симметрии Шварца и учитывая ограниченность $\Omega(t)$ на единичном круге, $\Omega(t)$ можно разложить в ряд

$$\Omega(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \quad (5.36)$$

причем $c_{2k} = 0$ в силу симметрии относительно мнимой оси.

В соотношении (5.36) отделяются действительные и мнимые части и вводится функция $\alpha(\sigma) = -d\theta/d\sigma$ (σ — полярный угол $t = e^{i\sigma}$).

Используя соотношения (5.33) и (5.34), можно получить выражение для кривизны контура постоянного давления

$$\kappa = - \frac{\chi(\sigma) e^{-i\Omega(\sigma)} d\theta/d\sigma}{dW/d\sigma}. \quad (5.37)$$

Между $\theta(\sigma)$, $\tau(\sigma)$ и $\alpha(\sigma)$ устанавливаются следующие функциональные зависимости:

$$J\alpha(\sigma) = \theta(\sigma) = \int_0^{\pi/2} \alpha(\sigma') d\sigma';$$

$$D\alpha(\sigma) = \tau(\sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \alpha(\sigma') \ln \left| \frac{\sin \frac{\sigma + \sigma'}{2}}{\sin \frac{\sigma - \sigma'}{2}} \right| d\sigma'. \quad (5.38)$$

Подставляя (5.38) в (5.37), получаем уравнение Вилла для функции $\alpha(\sigma)$

$$\alpha = Mf(\sigma) \kappa(J\alpha) e^{D\alpha}, \quad (5.39)$$

здесь $M = -2Q(1 - a^4)/\pi$, $f(\sigma) = (1 + 2a \sin \sigma + a^2)^{-2}$, R — радиус кривизны контура давления в точке B , а безразмерный параметр $Q = q/\lambda R$.

Зная $\alpha(\sigma)$, нетрудно определить $\theta(\sigma)$, $\tau(\sigma)$ и все характеристики течения и границу целика. При этом параметр a вычисляется по известному расстоянию r стока от точки B

$$\frac{r}{R} = M \int_a^1 \frac{t \exp(i\Omega(t))}{(t+a)^2 (at+1)^2} dt \quad (5.40)$$

(под t подразумевается мнимая часть t).

Для решения уравнения (5.39) используется метод, описанный в работе [248]. Подставляя (5.36) в (5.39), получим для неизвестных коэффициентов c_{2k+1} систему уравнений вида

$$c_{2k+1} = \frac{2M}{(2k+1)\pi} \int_0^{\pi} \kappa(\theta) f(\sigma) \exp \left(- \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} \cos(2k+1)\sigma \right) \times \\ \times \sin(2k+1)\sigma d\sigma. \quad (5.41)$$

Зная Q и r/R , методом итераций можно найти a и все c_{2k+1} . Практически удобнее задавать параметры a и r/R . Координаты границы целика, отнесенные к R , определяются из соотношений (5.33) и (5.35) с учетом (5.36). После преобразований получаем

$$\frac{z}{R} = 1 - M \int_0^1 \frac{t \exp f_0(t)}{(t+a)^2 (at+1)^2} dt + M \times \\ \times \int_0^t \frac{[f_3(t) \sin f_1(t) - f_2(t) \cos f_2(t) + i \{f_2(t) \sin f_1(t) + f_3(t) \cos f_1(t)\}] dt}{(t^2 + a^2)^2 (1 + t^2 a^2)^2}.$$

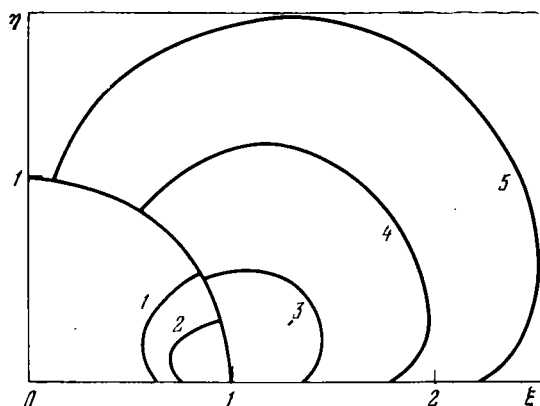


Рис. 7.20

где t — вещественно,

$$f_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} t^{2k+1}; \quad f_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} t^{2k};$$

$$f_2(t) = a^2(t^2 - 1)^2 - (a^2 - 1)^2 t^2; \quad f_3(t) = 2at(1 - t^2)(1 + a^2).$$

Для случая, когда контур давления есть дуга окружности ($\kappa = 1$), результаты расчета границы целиков приведены на рис. 7.20, заимствованном из работы [103]. Исходные данные для расчетов приведены в таблице 7.1.

Таблица 7.1

№	1	2	3	4	5
a	0,3				
r/R	0,25	0,15	-0,25	-0,5	-0,75
Q	0,8746	0,5785	1,335	3,146	5,435

Основной интерес при моделировании вытеснения вязкопластической нефти водой представлял вопрос о том, соответствует ли рассмотренная в этом параграфе предельная схема тем целикам, которые формируются при заводнении. Сопоставление теоретически рассчитанных целиков в элементе пятиточечной схемы с результатами моделирования показало, что в данном случае теоретическая и экспериментальная картины сходны между собой. Более того, было проведено сопоставление расчетных значений коэффициента охвата (относительной площади участков, в которых вытеснение прошло полностью) со значениями, полученными при моделировании. Результаты сопоставления показаны на

рис. 7.18, где сплошная линия отвечает теоретическим, а кружки — экспериментальным значениям. Таким образом, в данном случае эксперимент в основном согласуется с расчетом.

Для схемы рядного вытеснения расчет предельных целиков приводит к конфигурации, симметричной по отношению к направлению направления нагнетания. Иную картину дает эксперимент (рис. 7.5). Здесь характерные плавно сходящиеся на нет целики образуются лишь вблизи «эксплуатационных скважин»; вблизи нагнетательных их нет вовсе. Происхождение такого различия нетрудно понять. Оттеснение вытесняемой жидкости от нагнетательных скважин произошло на ранней стадии, когда фронт вытеснения еще не испытывал существенного влияния эксплуатационных скважин и был близок к круговому; естественно, что «восстановление» целика не могло произойти. В то же время в основной части «пласта» и вблизи «эксплуатационной скважины», где формирование целика происходит уже после прорыва, его форма близка к форме предельно-равновесного целика. Таким образом, расчеты по схеме предельно-равновесных целиков должны использоваться с учетом указанных особенностей вытеснения.

В целом из анализа данных по моделированию можно сделать следующий вывод. На реальной величине целиков остаточной вытесняемой жидкости сказываются два обстоятельства. Первое из них — изменение кинематики потока в ходе вытеснения. В любом случае при вытеснении в системе скважин происходит переход от фронтального вытеснения на начальной стадии (вблизи нагнетательных скважин) к «послойному отмыву» на заключительной стадии после прорыва вытесняющей фазы в эксплуатационную скважину. Схема расчета предельно-равновесных целиков такова, что она может описать правильно лишь результат послойного отмыва вытесняемой фазы, но не результат фронтального вытеснения. Поэтому эта схема лучше описывает те случаи, где геометрия течения обеспечивает быстрый прорыв вытесняющей жидкости, а также состояние целиков вблизи эксплуатационных скважин. Указанное отклонение приводит к завышению площади целиков при расчете по предельно-равновесной схеме.

С другой стороны, практически отмыв идет не до конца благодаря конечности прокачанного объема вытесняющей жидкости. В результате расчет по предельно-равновесной схеме недооценивает размер целиков. Это обстоятельство играет тем большую роль, чем больше отношение вязкости вытесняемой жидкости к вытесняющей и чем меньше равновесная площадь целиков. Оно должно стать определяющим при больших значениях параметра интенсивности потока.

§ 6. Оценка влияния предельного градиента на конечный коэффициент охвата заводнением на примере II пласта Арланской площади

Арланская площадь является одной из основных на Арланском нефтяном месторождении в Башкирии. Это месторождение состоит из шести изолированных песчано-алевролитовых пластов, расположенных друг под другом.

Пласт II практически изолирован от остальных пластов непроницаемыми глинистыми прослоями. Информацию о свойствах и строении пластов получают на основании изучения малой окрестности (призобойной зоны, составляющей примерно 1 м) скважин, расположенных друг от друга на сотни метров. Это обстоятельство в сочетании со сложностью гидродинамических расчетов приводит к тому, что, как правило, все расчеты ведутся на основе средних характеристик пластов и жидкостей в них.

В пределах Арланской площади средняя вязкость нефти в пластовых условиях составляет 17 спуаз; среднее значение мощности, определенное как среднее арифметическое по замерам в скважинах, равно 3,5 м; среднее значение абсолютной проницаемости, определенное по исследованию кернового материала, составляет 0,7 дарси [187]. Исследования арланской нефти в лабораторных условиях показали, что величина предельного градиента при проницаемости 0,7 дарси составляет 200 дин/см³ (0,02 ат/м) [179].

Разработка Арланской площади, как и всего месторождения, ведется с поддержанием пластового давления путем закачки воды вязкостью при пластовых условиях 1,65 спуаз через нагнетательные скважины [187]. При этом нагнетаемая вода вытесняет нефть к эксплуатационным скважинам, через которые нефть отбирается. На Арланской площади осуществляется так называемая рядная схема разработки (рис. 7.21): нагнетательные (треугольники) и эксплуатационные скважины располагаются рядами, между двумя соседними рядами нагнетательных скважин расположено от двух до пяти рядов эксплуатационных (тонкие линии на рис. 7.21, жирные линии — границы участков; цифры — их номера). Первый ряд нагнетательных скважин расположен за границей области нефтеносности, количество скважин в нем значительно меньше, чем в остальных нагнетательных рядах, а средняя приемистость — объем воды, нагнетаемой в сутки через одну скважину, — выше и равна 1000 м³/сут, в то время как в остальных 225 м³/сут [187]. Ряды нагнетательных скважин делят Арланскую площадь на самостоятельные участки, границы которых проходят по нагнетательным рядам. Таким образом, вода, нагнетаемая в пласт через внутренний ряд нагнетательных скважин, поступает одновременно в два соседних участка, через первый ряд — только в ограниченный им, а через последний, являющийся

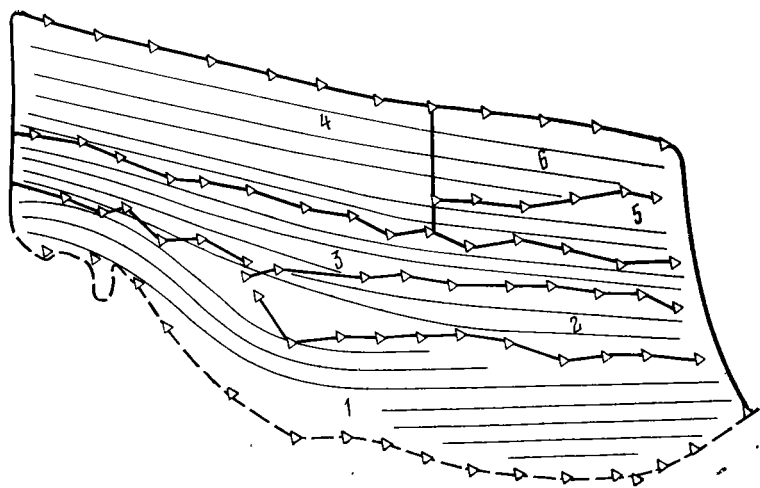


Рис. 7.21

ся граничным между Арланской и соседней Николо-Березовской площадями, на участки VI и V Арланской и соответствующий участок Николо-Березовской площадей (рис. 7.21). Предполагается равное распределение объема нагнетаемой воды по соседним участкам.

Расстояние между скважинами в рядах и между рядами меняется довольно значительно даже внутри отдельного участка. Поэтому каждый участок делится еще на зоны так, чтобы внутри каждой зоны расстановка скважин в рядах и расстановка рядов изменялись несущественно. Внутри каждой зоны выделяется элемент симметрии, определяется его коэффициент охвата β_j , который будет совпадать с коэффициентом охвата соответствующей зоны. Зная коэффициент охвата зоны и долю ее площади Δ_j в

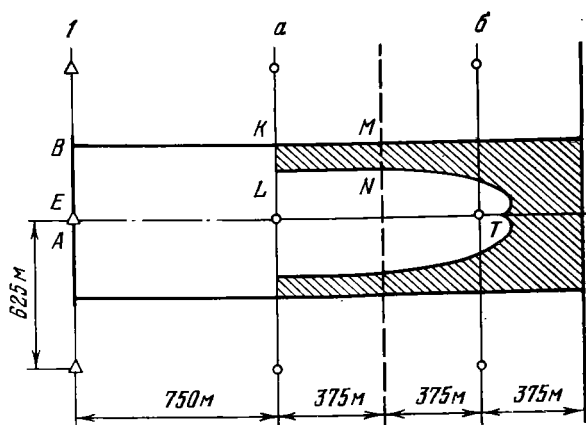


Рис. 7.22

общей площади пласта S , определяется коэффициент охвата всего II пласта

$$\beta = \sum_{j=1}^n \beta_j \frac{S_j}{S}, \quad (6.1)$$

где n — число зон II пласта.

Для примера рассмотрим определение коэффициента охвата зоны I участка 3. Разработка этой зоны ведется четырьмя эксплуатационными рядами со средним расстоянием между ними 750 м, симметрично расположенными между двумя нагнетательными. Среднее расстояние между скважинами в ряду (и эксплуатационном, и нагнетательном) составляет 625 м. Суммарные объемы нагнетаемой воды через каждый из рядов в зону 3—1 равны, поэтому можно выделить элемент симметрии течения, представленный на рис. 7.22. Предполагается, что объем поступающей в элемент симметрии воды поровну распределяется между находящимися там эксплуатационными скважинами (кружки), т. е. дебит каждой скважины составляет 56,25 м³/сут. Введем контур постоянного давления посередине между двумя рядами эксплуатационных скважин (пунктир на рис. 7.22). Вычислим величину λ с учетом того, что вытесняющий агент движется по области, содержащей остаточную нефть, снижающую проницаемость для воды в промытой зоне с 0,7 до 0,3 дарси [187]. Получаем $\lambda = 0,4 \cdot 10^{-4}$ см/сек. Определим величину скорости фильтрации воды между нагнетательным рядом и первым эксплуатационным $w = 0,7 \cdot 10^{-4}$ см/сек. Поскольку отношение $w/\lambda > 1$, то между нагнетательным рядом и первым эксплуатационным целик не образуется (поток предполагается прямолинейным). Между первым эксплуатационным рядом и линией гидродинамической симметрии CD, поскольку величина $w/\lambda = 0,875$, образуется полоса невытесненной нефти, ширина которой KL равна 35 м (см. § 5 этой главы). Отметим, что при $w/\lambda \geq 1$ этой полосы не было бы. И, наконец, рассмотрим область между линией $p = \text{const}$ и линией симметрии CD. Такая ситуация была рассмотрена в предыдущем параграфе, величины вымываемой площади могут быть определены по кривой 1 на рис. 7.12 для $Q/\lambda\Delta = 4$. Суммируя всю вымываемую площадь и деля ее на площадь зоны 3—1, получаем величину коэффициента охвата равной 0,67. Аналогично определяются коэффициенты охвата всех остальных участков. Пользуясь формулой (6.1), получаем, что коэффициент охвата II пласта Арланской площади равен $\sim 0,75$.

Глава VIII

Течение аномальных жидкостей в гетерогенной пористой среде

Нетрудно предвидеть, что основной качественный эффект нелинейной фильтрации — перестройка полей течения при изменении средней интенсивности потока — должен проявляться и при движении в неоднородных средах. Однако учет неоднородности среды еще более усложняет задачу, и фактически рассчитаны могут быть лишь простейшие частные случаи. Наиболее важный поддающийся расчету случай — это движение в слоисто-неоднородном пласте, т. е. пласте, состоящем из однородных слоев, отличающихся между собой по свойствам, прежде всего по проницаемости. Важность этого случая обусловлена тем, что такая схема приближенно отображает реальное слоистое строение пластов осадочных пород, из которых добывается нефть, а сравнительная простота — тем, что удается ограничиться двумя предельными случаями: пласта с идеально разобщенными пропластками, когда отдельные слои считаются взаимодействующими между собой лишь через посредство вскрывающих их скважин, и пласта с идеально сообщающимися между собой пропластками, когда распределение давления по толщине пласта можно считать гидростатическим. Эти два случая соответствуют двум известным схемам предельно-анизотропного грунта по Г. К. Михайлову [136].

Мы ограничимся здесь лишь несколькими примерами, иллюстрирующими методы и результаты расчета течений в слоисто-неоднородных пластах, многие другие задачи рассмотрены в работах [4, 24, 34, 77, 78, 107, 117, 122, 123, 128, 138, 149, 163, 167, 168, 183].

§ 1. Течение однородной жидкости в тонком слоистом пласте

Рассмотрим горизонтальный пласт с непрерывным распределением проницаемости по мощности $k(z)$. Будем считать пласт тонким настолько, что распределение давления вдоль каждой вертикальной линии в нем можно считать гидростатическим (тем самым предполагается, что отсутствуют совершенно непроницаемые пропластки).

Трехмерное распределение давления в пласте при сделанных предположениях можно вполне охарактеризовать, задав распределение давления в одной горизонтальной плоскости $p(x, y)$. Аналогичным образом каждой точке этой плоскости с координатами x, y можно сопоставить среднее значение скорости фильтрации по мощности пласта H

$$w(x, y) = \frac{1}{H} \int_0^H u(x, y, z) dz \quad (1.1)$$

(ось z направлена вертикально вверх). Из предположения о гидростатическом распределении давления по вертикали следует, что во всех точках с одинаковыми координатами x, y скорость фильтрации направлена в одну сторону, хотя и меняется по величине поперек слоя. Допустим, что в каждом отдельном слое закон фильтрации представлен выражением (3.6) и (3.8) главы I. Подставим это выражение в уравнение (1.1) и введем функцию распределения проницаемости $F(k/k_0)$, получаем

$$w(x, y) = -\frac{k_0}{\mu H} \int_{k_m/k_0}^{k_g/k_0} \frac{k}{k_0} \left[\text{grad } p - G\left(\frac{k}{k_0}\right) \frac{\text{grad } p}{|\text{grad } p|} \right] dF\left(\frac{k}{k_0}\right) \quad (1.2)$$

(предполагается, что функция F не зависит от x и y). Здесь средняя

проницаемость $k_0 = \frac{1}{H} \int_0^H k(z) dz$, k_g , до которого производится интегрирование, определяется условием $|\text{grad } p| = G(k_g/k_0)$, а k_m — максимальная проницаемость пласта.

Легко убедиться, что уравнение (1.2) выражает нелинейную связь между w и $\text{grad } p(x, y)$ (рис. 8.1).

Пусть теперь рассматривается движение в пластовой системе в целом. Введем в каждой точке пласта среднюю скорость $w(x, y)$ из соотношения (1.1) и условное давление, равное давлению $p(x, y)$. Осредняя уравнение неразрывности

$$\text{div } u = 0$$

по мощности пласта, нетрудно убедиться, что средняя скорость удовлетворяет двумерному уравнению неразрывности *

$$\text{div } w = 0.$$

Отсюда следует, что осредненное движение в слоистом пласте можно рассматривать так же, как плоское фильтрационное движе-

* Аналогичным образом может быть рассмотрено уравнение неразрывности для нестационарного движения в линейно-деформируемом пласте и выведены уравнения упругого режима при нелинейном законе фильтрации (1.2).

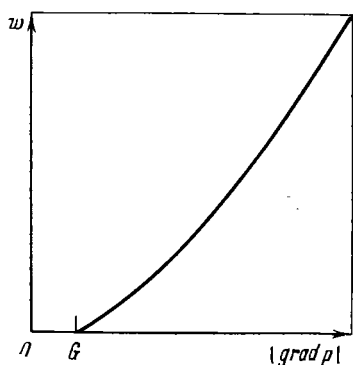


Рис. 8.1

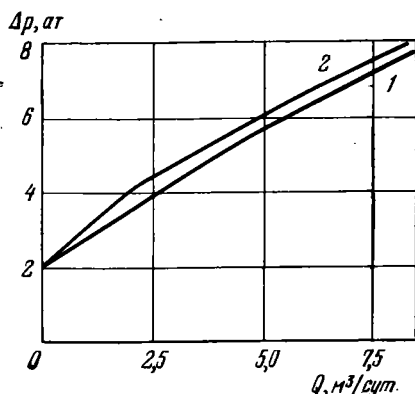


Рис. 8.2

ние несжимаемой жидкости в однородном пласте, но при законе фильтрации, описываемом уравнением (1.2).

Таким образом, рассмотрение наряду с обобщенным законом Дарси (3.6) главы I более общих нелинейных законов фильтрации позволяет описать важное для практики движение в неоднородном пласте с изменением эффективной мощности пласта при изменении градиента давления. Действительно, соотношение (1.2) показывает, в какой части мощности пласта движение происходит, а в какой — нет.

Отметим еще, что при осреднении по существу не учтены те перетоки из пропластка в пропласток, которые необходимы для выравнивания давления по вертикали. Это может повести к искажению поля скоростей и давлений вблизи мест максимальных перетоков, т. е. вблизи тех мест, где включаются или выключаются новые пропластки, однако не может заметно исказить течение в целом. Кроме того, развитая схема предполагает, что даже при отсутствии основного движения в некотором слое все же имеются медленные перетоки, которые необходимы для выравнивания давления.

Если пласт состоит из n пропластков мощностью h_i ($H = \sum_{i=1}^n h_i$) и проницаемостью k_i каждый, то соотношение (1.2) принимает вид

$$w(x, y) = -\frac{1}{\mu H} \sum_{i=1}^j k_i h_i \left[\text{grad } p(x, y) - G_i \frac{\text{grad } p(x, y)}{|\text{grad } p(x, y)|} \right]. \quad (1.3)$$

Здесь индекс j , до которого производится суммирование, определяется условием

$$G_j < |\text{grad } p| \leq G_{j+1}.$$

В качестве примера применения развитой схемы рассмотрим приток с дебитом q к скважине в круговом пласте. При этом осредненная скорость w направлена к скважине радиуса r_c и обратно пропорциональна расстоянию от скважины r

$$w(r) = q/2\pi rH. \quad (1.4)$$

Подставляя выражение (1.4) в соотношение (1.2), определим из него $\partial p/\partial r$, а затем, интегрируя, — распределение давления по пласту.

Пример такого расчета приведен на рис. 8.2 для случая «трех-слойного» пласта с параметрами $k_1 = 1$ дарси, $G_1 = 200$ дин/см³ (0,02 ат/м), $h_1 = 1$ м; $k_2 = 0,25$ дарси, $G_2 = 400$ дин/см³ (0,04 ат/м), $h_2 = 2$ м; $k_3 = 0,1$ дарси, $G_3 = 600$ дин/см³ (0,06 ат/м), $h_3 = 3$ м (кривая 1). Очевидно, что для пласта с непрерывным распределением проницаемости зависимость q (Δp) будет представлять собой плавную кривую, обращенную выпуклостью к оси Δp .

§ 2. Застойные зоны в слоистом пласте

Для исследования осредненного стационарного движения в слоистом пласте применима методика перехода к плоскости годографа. При этом полностью сохраняется постановка краевых задач, рассмотренных ранее (гл. III—V).

Уравнение для функции тока ψ в плоскости годографа принимает вид

$$w(w + \lambda_i) \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2} + (w - \lambda_i) \frac{\partial \psi}{\partial w} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2.1)$$

$$(w_i \leq w \leq w_{i+1}),$$

где

$$\lambda_i = \frac{G'_i \bar{k}_i}{\mu}, \quad \bar{k}_i = \frac{\sum_{j=1}^i k_j h_j}{\sum_{j=1}^i h_j}, \quad G'_i = \frac{\sum_{j=1}^i k_j h_j G_j}{\sum_{j=1}^i k_j h_j}. \quad (2.2)$$

Из условия непрерывности функции тока и координат в физической плоскости на линиях $w = w_i$ получаем условия сопряжения

$$\psi(w_i + 0, \theta) = \psi(w_i - 0, \theta);$$

$$\frac{1}{w_i + \lambda_{i-1}} \frac{\partial \psi(w_i - 0, \theta)}{\partial w} = \frac{1}{w_i + \lambda_i} \frac{\partial \psi(w_i + 0, \theta)}{\partial w}. \quad (2.3)$$

Появление дополнительных параметров λ_i , зависящих от свойств отдельных слоев слоистого пласта, делает затруднительным, если не вообще бесперспективным, детальное изучение конкретных задач. В связи с этим на первый план выступает возможность получения тех или иных приближенных решений или оценок на основе

решения упрощенных задач. При этом большую роль играет то обстоятельство, что для уравнения (2.1) легко в явном виде выписываются элементарные решения (гл. III). Рассмотрим это на примере течения, создаваемого кольцевой батареей скважин в двухслойном пласте, когда в одном из пропластков проявляется предельный градиент, а в другом нет [77]. Закон фильтрации, отвечающий такой схеме, имеет вид

$$\begin{aligned} \text{grad } p &= -(\mu/k)(w + \lambda); & w \geq w_0; & \lambda = kG/\mu; \\ \text{grad } p &= -\mu w/k\varepsilon; & w \leq w_0; & \varepsilon = \frac{w_0}{w_0 + \lambda}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

На рис. 3.5, а показано расположение скважин, моделируемых точными источниками интенсивности q , а на рис. 3.5, б — соответствующая задача в плоскости годографа скорости. Решение аналогичной задачи для однослойного пласта приведено выше (гл. V). На рис. 5.1 ÷ 5.5 показано расположение застойных зон при фильтрации с предельным градиентом, полученное путем численного расчета. Характерно, что размеры застойных зон весьма велики даже при достаточно больших значениях параметра a_0 . Это открывает возможность применения к этим задачам приближенного приема, указанного в гл. V.

Приведенное там сопоставление показывает, что приближенным решением можно пользоваться вплоть до $a_0 = 5$ с достаточной для технических целей точностью.

Определим расположение характерных линий постоянной скорости при фильтрации по кусочно-линейному закону (2.4).

Рассмотрим течение, отвечающее внутреннему обтеканию угла раствора ($\pi - \theta_0$) (идеализацию течения у критической точки). На плоскости годографа скорости этому случаю отвечает задача в полуполосе $0 < \theta < \theta_0$, $0 < w < \infty$. Для функции тока ψ имеем уравнения

$$\begin{aligned} w^2 \psi''_{ww} + w \psi'_w + \psi''_{\theta\theta} &= 0, & 0 \leq w \leq w_0; \\ w(w + \lambda) \psi''_{ww} + (w - \lambda) \psi'_w + \psi''_{\theta\theta} &= 0, & w_0 \leq w < \infty \end{aligned} \quad (2.5)$$

при условиях

$$\psi(w, 0) = \psi(0, \theta) = \psi(w, \theta_0) = 0. \quad (2.6)$$

При $w = w_0$ решения уравнений (2.5) должны удовлетворять условиям сопряжения, следующим из требования непрерывности функции тока и координат точек физической плоскости. Легко проверить, что эти условия имеют вид

$$\psi(w_0 + 0, \theta) = \psi(w_0 - 0, \theta); \quad (2.7)$$

$$\frac{w_0}{w_0 + \lambda} \frac{\partial \psi(w_0 - 0, \theta)}{\partial w} = \frac{\partial \psi(w_0 + 0, \theta)}{\partial w}. \quad (2.8)$$

Соответствующее элементарное решение с точностью до множителя определяется выражениями

$$\begin{aligned}\psi &= C_0 w^s \sin s\theta; \quad w \leq w_0; \\ \psi &= [A_0 (\lambda/(w + \lambda))^s F(s - 1, s, 2s - 1, \lambda/(w + \lambda)) + \\ &+ B_0 (w/\lambda)^s F(2 - s, 2 + s, 3, -w/\lambda)] \sin s\theta; \quad w \geq w_0,\end{aligned}\quad (2.9)$$

при $s = \pi/\theta_0 = n/(n - 1)$.

Свободный множитель выберем из условия, чтобы решение росло при $w \rightarrow \infty$ как w^s . Тогда имеем

$$\begin{aligned}A_0 &= \frac{\Gamma(2 + s) \Gamma(1 + s)}{2s\Gamma(2s)} \frac{w_0(w_0 + \lambda)^s}{\lambda^s} \left[2(w_0 + \lambda) F\left(2 - s, 2 + s, 2, -\frac{w_0}{\lambda}\right) - \right. \\ &- s w_0 F\left(2 - s, 2 + s, 3, -\frac{w_0}{\lambda}\right) \left. \right] [F(s - 1, s, 2s, \lambda/(w_0 + \lambda)) + \\ &+ F(s - 1, s + 1, 1 + 2s, \lambda/(w_0 + \lambda))]^{-1}; \\ B_0 &= \frac{\lambda^s \Gamma(2 + s) \Gamma(1 + s)}{2\Gamma(2s)};\end{aligned}\quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}C_0 &= \frac{\Gamma(2 + s) \Gamma(1 + s)}{2\lambda s \Gamma(2s)} \left(\frac{\lambda}{w_0}\right)^{s-1} \left[2(w_0 + \lambda) F\left(2 - s, 2 + s, 2, -\frac{w_0}{\lambda}\right) \times \right. \\ &\times F\left(s - 1, s, 1 + 2s, \frac{\lambda}{w_0 + \lambda}\right) + s w_0 F\left(2 - s, 2 + s, 3, -\frac{w_0}{\lambda}\right) \times \\ &\times F\left(s - 1, s + 1, 1 + 2s, \frac{\lambda}{w_0 + \lambda}\right) \left. \right] \left[F\left(s - 1, s, 1 + 2s, \frac{\lambda}{w_0 + \lambda}\right) + \right. \\ &+ F\left(s - 1, s + 1, 1 + 2s, \frac{\lambda}{w_0 + \lambda}\right) \left. \right]^{-1}.\end{aligned}$$

Асимптотика этого решения при $\lambda \rightarrow 0$ имеет вид

$$\psi = C \frac{2\Gamma\left(\frac{2n}{n-1}\right)}{\Gamma\left(2 + \frac{n}{n-1}\right) \Gamma\left(1 + \frac{n}{n-1}\right)} \left(\frac{w}{\lambda}\right)^{\frac{n}{n-1}} \sin \frac{n\theta}{n-1}, \quad (2.11)$$

где $C = C' B_0$. В результате находим

$$C' = \frac{q}{2\pi} \frac{n-1}{(na)^{n/(n-1)}} \quad (2.12)$$

и искомое решение получается из (2.9) заменой A_0, B_0, C_0 на $C' A_0, C' B_0$ и $C' C_0$. В частности, линия $w = w_0$, отвечающая точке излома ломаной, описывающей закон фильтрации, превращается в окружность радиуса

$$R' = \frac{s \Gamma^2(s)}{\Gamma(2s)} \left(\frac{2\pi R \lambda}{qn}\right)^{1/(n-1)}, \quad s = \frac{n}{n-1}, \quad w_0 \ll \lambda, \quad (2.13)$$

который характеризует примерное положение границы застойной зоны в том слое, где движение жидкости происходит с предельным градиентом.

При следующих значениях параметров: $k_1 = 1$ дарси, $k_2 = 0,2$ дарси, $h_1 = 0,5$ м, $h_2 = 0,2$ м, $n = 6$, $\mu = 8$ спуз, $G_1 = 0$, $G_2 = 200$ дин/см³ (0,02 ат/м), $q = 10$ м²/сутки, $R = 200$ м, величина $R' \approx 0,495R$.

Таким образом, даже при сравнительно небольшой величине предельного градиента в одном из пропластков может оказаться неподвижной значительная часть жидкости. Можно полагать, что в ходе вытеснения нефти водой в подобной ситуации в малопроницаемом пласте образуются целики больших размеров, приводящие к значительным потерям нефти.

§ 3. Квазиодномерное вытеснение в слоистом пласте

Пусть теперь неоднородный пласт, насыщенный вязкопластической жидкостью (нефтью), вскрыт нагнетательной галереей, через которую закачивается вытесняющий вязкий агент (вода) со скоростью $w(t)$ [183]. Естественно считать, что вода будет преимущественно поступать в высокопроницаемые пропластки. Тогда в каждом сечении выделяются три зоны с последовательно уменьшающейся проницаемостью: 1) зона с проницаемостью от k_m до k_s , занятая водой; 2) зона подвижной нефти от k_s до k_g , где k_g определяется условием $G(k_g/k_0) = |\partial p/\partial x|$; 3) зона неподвижной нефти от k_g до нуля. Под коэффициентом охвата по мощности z здесь понимается доля пропластков в сечении, занятых водой. Для оценки величины z примем вытеснение в элементарном слое dz квазипоршневым, вытеснение с постоянными значениями насыщенности воды s^* в обводненной зоне и начальной насыщенностью s_0 в нефтяной. Вытеснение в слое dz описывается уравнениями (1.10) главы III, в которых фазовые проницаемости имеют постоянные значения, соответствующие s_0 и s^* , а абсолютная проницаемость и предельный градиент являются функциями z .

Введем средний предельный градиент $G_0 = \frac{1}{H} \int_0^H G(z) dz$

и проведем операцию осреднения. Получаем осредненный закон фильтрации несмешивающихся жидкостей

$$\begin{aligned} \bar{w}_B &= - \frac{k_0 \bar{f}_B(s)}{\mu_B} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \bar{w}_H &= - \frac{k_0}{\mu_H} \left[\bar{f}_H(s, \partial p/\partial x) \frac{\partial p}{\partial x} + g(s, \partial p/\partial x) \right]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь

$$\bar{f}_B(s) = f_B(s^*) \int_{k_m/k_0}^{k_s/k_0} \frac{k}{k_0} dF(k/k_0);$$

$$\bar{f}_H(s, \partial p / \partial x) = f_H(s_0) \int_{k_s/k_0}^{k_g/k_0} \frac{k}{k_0} dF(k/k_0); \quad (3.2)$$

$$g(s, \partial p / \partial x) = f_H(s_0) \int_{k_s/k_0}^{k_g/k_0} \frac{k}{k_0} G(k/k_0) dF(k/k_0).$$

Уравнения неразрывности фактически не меняются, лишь m заменяется на $m_1 = m(s^* - s_0)$.

Введем безразмерную суммарную скорость $u(t) = w(t) \mu_H / k_0 G_0$. Поступая далее так же, как в теории Баклея — Лаверетта, получим для однородное уравнение в частных производных 1-го порядка, аналогичное уравнению Баклея — Лаверетта. Решение его строится теми же методами. Функция Баклея — Лаверетта в данном случае будет зависеть как от s , так и от $u(t)$.

Для иллюстрации рассмотрим пример, в котором функция распределения проницаемости представляется в виде

$$F(k/k_0) = \sqrt{k/3k_0}, \quad 0 \leq k \leq 3k_0. \quad (3.3)$$

Подставим (3.3) в (3.2) и (3.4), получим для суммарной безразмерной скорости фильтрации $u(t)$ выражение

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(s - \frac{s^2}{2} - \frac{1}{2} + \xi(M-1) \left(s - s^2 + \frac{s^3}{3} \right) + \frac{\xi}{3} + \frac{1}{6\xi^2} \right). \quad (3.4)$$

Здесь

$$M = f_B(s^*) \mu_H / f_H(s_0) \mu_B; \quad \xi = -\sqrt{3} \frac{\partial p}{\partial x} / G_0 = 1/(1 - s_m),$$

где s_m — максимальная возможная водонасыщенность при данном градиенте давления. Уравнение (3.4) дает неявную связь между u , ξ и s . Из него можно численно получить зависимость ξ от u и s . Для определения предельного значения коэффициента охвата s_m из (3.4) получаем соотношение

$$\frac{u}{M \sqrt{3}} = \frac{s_m - s_m^2 + s_m^3/3}{1 - s_m}. \quad (3.5)$$

Отсюда при малых u

$$s_m \approx u \sqrt{3}/M, \quad (3.6)$$

а при больших u

$$s_m \approx 1 - \frac{1}{3(\sqrt{3}u/M - 1)}. \quad (3.7)$$

Имея зависимость $\xi(s, u)$, с помощью формулы (3.4) можно построить функцию Баклея — Лаверетта $f(s, u)$ и обычными методами

найти коэффициент охвата s

$$x(s, t) = x_0(s) + \frac{u}{m_1} \int_0^t f'_s(s, u) dt \quad (3.8)$$

(x — безразмерная координата).

На рис. 8.3 показан вид функции f'_s , рассчитанной для $M=5$, а на рис. 8.4 приведен предельный коэффициент охвата s_m . Из графиков видно, что, во-первых, s_m невелико даже при сравнительно больших значениях u , и, во-вторых, прорыв воды происходит крайне быстро, а коэффициент охвата нарастает крайне медленно. Причина такой низкой эффективности вытеснения — в преобладании малопроницаемых прослоев при распределении типа (3.3).

Как видно из проведенного исследования линейного случая, коэффициент охвата сильно зависит от скорости u . Вблизи скважины, где скорость выше, эффективность вытеснения должна быть выше. Для выяснения этого обстоятельства можно совершенно аналогично рассмотреть случай радиального течения.

Зависимость s_m от r для пласта с распределением проницаемости вида (3.3) показана на рис. 8.5.

§ 4. Движение в пласте с изолированными пропластками

В тех случаях, когда отдельные пропластки, из которых сложен рассматриваемый пласт, изолированы друг от друга на всем протяжении и сообщаются толь-

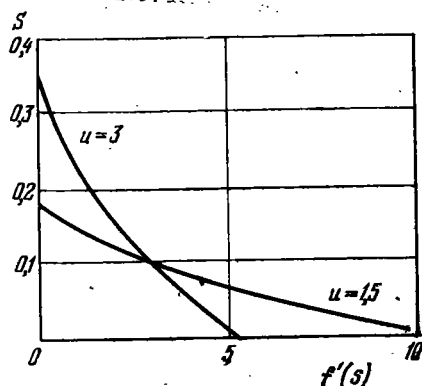


Рис. 8.3

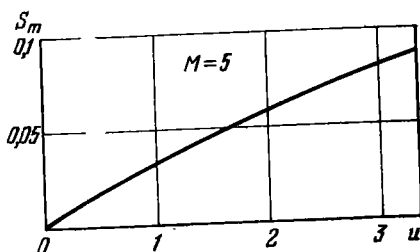


Рис. 8.4

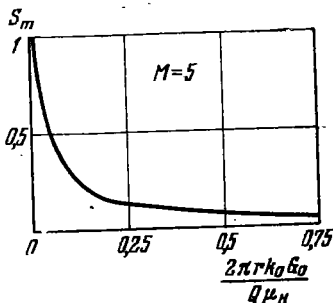


Рис. 8.5

ко в скважинах, весь анализ движения может быть проведен на основе уже изученных задач течения в однородном пласте. Допустим, например, что все пласты вскрыты общей системой скважин. Обозначим через P^j давление в j -й скважине, через p_i — давление в i -м пропластке. Через q_i^j обозначим расход через i -й пропласток, а через Q^j — суммарный расход. Тогда, очевидно, имеем: на контуре j -й скважины

$$p_1^j = p_2^j = \dots = p_n^j = P^j; \quad (4.1)$$

$$\sum_{i=1}^n q_i^j h_i = Q^j. \quad (4.2)$$

Подобные соотношения имеют место на любой поверхности постоянного давления, общей для всех пропластков, например на контуре питания.

Зная для каждого из пропластков связь между давлениями в скважинах и дебитами, полученную из решения соответствующей задачи для однородного пласта, получаем из (4.1) и (4.2) систему уравнений, достаточную для определения неизвестных q_i^j и P^j (если заданы Q^j) и т. п. Так, в простейшем случае притока к центрально расположенной скважине в круговом пласте радиуса R имеем!

$$q_i = \frac{2\pi k_i h_i}{\mu} \cdot \frac{\Delta p - G_i R}{\ln R/r_c} \quad (\Delta p > RG_i);$$

$$q_i = 0 \quad (\Delta p \leq RG_i), \quad (4.3)$$

и соотношение (4.2) определяет соответствующий данному перепаду суммарный дебит.

Результат расчета для слоистого пласта с параметрами, приведенными в § 1, но в отсутствие внутренних перетоков между пропластками показан на рис. 8.2 (кривая 2). Как видно, в данном случае различие между кривыми 1 и 2 невелико.

Отметим, что рассмотренные предельные схемы получаются из реальной двумерной задачи либо путем введения идеально проводящих вертикальных отрезков (случай свободного перетока), либо путем введения непроницаемых перегородок между слоями. Поэтому при данном значении Δp дебиты, рассчитанные по двум предельным схемам, будут заключать между собой дебит, отвечающий реальному движению (ср. § 4 гл. II).

Применим теперь ту же схему расчета к отысканию системы предельно-равновесных целиков в слоистом пласте.

При определении предельно-равновесной конфигурации целиков давление в каждом пропластке определяется как вещественная часть комплексного потенциала течения W (гл. VII, § 5). Так, для пятиточечной сетки скважин соотношения (4.1) — (4.2)

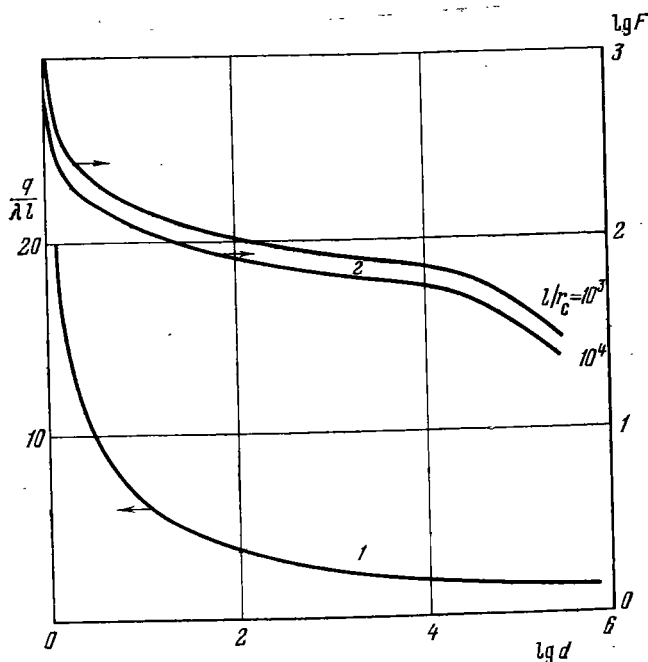


Рис. 8.6

с учетом (5.29) главы VII принимают вид (индекс j опускаем)

$$\frac{q_1}{\lambda_1 l} \lg \left[\frac{(V\bar{d}_1 - 1)}{2^{11} (r_c/l)^2} \left(\frac{q_1}{\lambda_1 l} \right)^2 \right] = \dots = \sqrt{\frac{k_1}{k_n}} \frac{q_n}{\lambda_n l} \lg \left[\frac{V\bar{d}_n - 1}{2^{11} (r_c/l)^2} \left(\frac{q_n}{\lambda_n l} \right)^2 \right]; \quad (4.4)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\lambda_i l} \frac{h_i}{H} \sqrt{\frac{k_i}{k_1}} = \frac{Q_{\mu}}{k_1 G_1 l}.$$

Система (4.4) должна решаться относительно неизвестных безразмерных параметров $q_i/\lambda_i l$. В силу нелинейности системы решение ее будем искать графически.

Введем функцию F соотношением

$$F = \frac{q}{\lambda l} \lg \left[\frac{V\bar{d} - 1}{2^{11} (r_c/l)^2} \left(\frac{q}{\lambda l} \right)^2 \right] \quad (4.5)$$

и, используя (5.32) главы VII, построим зависимость функции F для значений $l/r_c = 10^3$ и 10^4 и $q/\lambda l$ от параметра d (рис. 8.6). Если известна величина $q/\lambda l$ для одного пропластка, то рис. 8.6 позволяет получить значения $q/\lambda l$ для всех остальных пропластков. Действительно, пусть известно $q_1/\lambda_1 l$. Пользуясь кривой 1 (рис. 8.6), определяем величину d_1 , а по кривой 2 — значение функции F_1 для

пропластка с номером 1. Зная величины k_1/k_2 , k_1/k_3 и т. д., вычисляем значения функции F для остальных пропластков, деля значение функции F_1 для первого пропластка на величину $\sqrt{k_1/k_i}$ для соответствующего i -го пропластка

$$F_i = F_1 \sqrt{\frac{k_1}{k_i}}. \quad (4.6)$$

Опять пользуясь рис. 8.6, определяем по значениям функции F_i величины $q_i/\lambda_i l$ для всех пропластков.

Из сказанного ясно, что достаточно определить величину $q/\lambda l$ или, что то же самое, величину d для одного пропластка. Для этого необходимо задать набор значений параметра d и, используя графики рис. 8.6 для определения $q_i/\lambda_i l$ для каждого значения параметра d , построить зависимость функции

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\lambda_i l} \frac{h_i}{H} \sqrt{\frac{k_i}{k_1}} \quad (4.7)$$

от d для заданных значений h_i/H и k_i/k_1 . Набор параметров $q_i/\lambda_i l$, при котором функция Φ принимает значение, равное $Q\mu/k_1 G_1 l$, соответствует искомому решению системы (4.4). Коэффициент охвата β_i в каждом пропластке определяется по рис. 7.18 для соответствующего значения $q_i/\lambda_i l$. Для определения объемного коэффициента охвата β необходимо воспользоваться соотношением

$$\beta = \sum_{i=1}^n \beta_i h_i / H. \quad (4.8)$$

В качестве примера рассмотрим вытеснение нефти в двухслойном пласте ($n = 2$) т параметрами: $Q = 200$ м³/сутки, $\mu = 1$ спуаз, общая мощность пласта $H = 4$ м, а мощности пропластков соответственно $h_1 = 0,8$ м, $h_2 = 3,2$ м, проницаемость первого пропластка $k_1 = 0,5$ дарси, а проницаемость второго пропластка $k_2 = 0,125$ дарси, так что средняя проницаемость всего пласта равна 0,2 дарси, величина предельного градиента в первом пропластке $G_1 = 200$ дин/см³ (0,02 ат/м), во втором $G_2 = 400$ дин/см³ (0,04 ат/м), расстояние между нагнетательными скважинами $2l = 500$ м, а радиус скважины $r_c = 10$ см. Тогда получаем, что коэффициент охвата в первом, высокопроницаемом, пропластке $\beta_1 = 0,9$, а во втором, малопроницаемом, — $\beta_2 = 0,5$, т. е. вытеснение происходит преимущественно по высокопроницаемому пропластку. Объемный коэффициент охвата β для рассматриваемого случая составляет 0,58, что существенно ниже, чем для однородного пласта той же суммарной мощности, и со средней проницаемостью, равной 0,2 дарси ($\beta = 0,73$). Из этого следует, что использование в расчетах среднего по мощности значения проницаемости приводит к существенному завышению коэффициента охвата многослойных пластов.

Аналогично решается задача об определении объемного коэффициента охвата при эксплуатации многослойной полосообразной залежи двумя рядами скважин.

Получаем после преобразований, аналогичных тем, которые были приведены выше, систему для определения безразмерных параметров $q_i/\lambda_i\Delta$

$$\frac{q_1}{\lambda_1\Delta} \lg\left(\frac{e_1}{\pi} \frac{q_1}{\lambda_1\Delta} \frac{\Delta}{r_c}\right) = \dots = \sqrt{\frac{k_1}{k_n}} \frac{q_n}{\lambda_n\Delta} \lg\left(\frac{e_n}{\pi} \frac{q_n}{\lambda_n\Delta} \frac{\Delta}{r_c}\right); \quad (4.9)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\lambda_i\Delta} \frac{h_i}{H} \sqrt{\frac{k_i}{k_1}} = \frac{Q\mu}{k_1 G_1 \Delta},$$

где e_i есть функция $q_i/\lambda_i l$ и Δ/l , а остальные обозначения имеют тот же самый физический смысл. Для графического решения системы (4.9) построим зависимость

функции $F = \frac{q}{\lambda\Delta} \lg\left(\frac{e}{\pi} \frac{q}{\lambda\Delta} \frac{\Delta}{r_c}\right)$

от параметра $q/\lambda\Delta$ для различных значений Δ/l и Δ/r_c ($\Delta/l = 0,5; 1; 2; \Delta/r_c = 10^3; 10^5$). В силу слабой зависимости $\lg F$ от параметра Δ/l при изменении Δ/l от 0,5 до 2 для данного интервала изменения параметра Δ/l строится кривая средних значений $\lg F$ (рис. 8.7). Графический метод решения системы (4.9) полностью аналогичен изложенному выше.

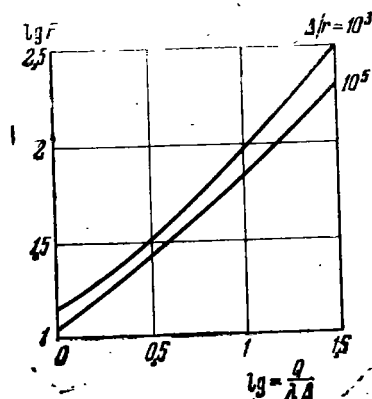


Рис. 8.7

В качестве примера рассмотрим двухслойную полосообразную залежь с параметрами, указанными выше. Тогда получаем, что коэффициент охвата в высокопроницаемом пропластке $\beta_1 = 0,63$, а в низкопроницаемом — $\beta_2 = 0,35$. Объемный коэффициент охвата имеет значение $\beta = 0,4$, что существенно ниже значения коэффициента охвата для залежи той же суммарной мощности и средней по объему проницаемости, равной 0,2 дарси ($\beta = 0,58$, см. гл. VII, § 5).

Некоторые задачи нестационарного движения аномальных жидкостей.

Возможности определения параметров пласта

Теория нестационарной фильтрации аномальных жидкостей разработана весьма неполно, хотя и получено большое число решений (главным образом приближенных) одномерных задач, что связано прежде всего с отсутствием достаточно универсальных методов решения. Ниже приводится ряд точных (автомодельных) решений задач нестационарного движения аномальных жидкостей и некоторые приближенные решения, связанные с существующими и перспективными приложениями теории.

§ 1. Автомодельные решения задач нестационарной фильтрации аномальных жидкостей

Дополняя уравнение закона фильтрации

$$\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p = -\Phi(w) \frac{w}{w} \quad (1.1)$$

уравнением неразрывности

$$\frac{\partial m \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho w) = 0 \quad (1.2)$$

и уравнениями

$$\frac{dm}{m} = \frac{1}{K_m} dp; \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{K_\rho} dp, \quad (1.3)$$

получаем уравнения упругого режима

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{K}{m} \operatorname{div} w = 0; \quad \operatorname{grad} p = -\frac{\mu}{k} \Phi(w) \frac{w}{w}, \quad (1.4)$$

где $K = (1/K_m + 1/K_\rho)^{-1}$ — приведенный модуль объемного сжатия пластовой системы.

1. Рассмотрим одномерное прямолинейно-параллельное движение в пласте, занимающем полупространство $x > 0$.

Имеем уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{K}{m} \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\mu}{k} \Phi(w). \quad (1.5)$$

При произвольном законе фильтрации уравнения (1.5) допускают автомодельное решение вида *

$$p = Gx / (\xi), \quad \xi = x/2 \sqrt{\kappa t}, \quad \kappa = kK/m\mu, \quad (1.6)$$

если начальные условия имеют вид

$$p = A' + Ax \quad (1.7)$$

а краевое условие при $x = 0$ вид

$$p'_x(t, 0) = B. \quad (1.8)$$

Подставляя выражение (1.6) в (1.5), получим уравнение

$$-2\xi^2 f'(\xi) = \frac{d}{d\xi} \Psi(f + \xi f') \quad (1.9)$$

(Ψ — функция, обратная к Φ , т. е. функция, определяющая зависимость w от $|\text{grad } p|$) при условиях

$$f(\infty) = A/G = \alpha; \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} (f + \xi f') = B/G = \beta. \quad (1.10)$$

Рассмотрим решение уравнения (1.9) при кусочно-линейном законе фильтрации

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \varepsilon z & (|z| \leq 1); \\ \Psi(z) &= \varepsilon z + z - \text{sgn } z & (|z| \geq 1). \end{aligned} \quad (1.11)$$

В этом случае легко получается явное решение задачи [64].

Устремляя в этом решении ε к нулю, можно проследить переход к течению с предельным градиентом давления. Так, на рис. 9.1 показано распределение безразмерного давления $p^* = p/G \cdot 2\sqrt{\kappa t} \equiv \xi f(\xi)$ для случая пуска галереи в первоначально невозмущенном пласте ($\alpha = 0$, $\beta = 2$) при $\varepsilon = 0$; 0,1 и 1,0. Здесь примечательны два обстоятельства. Прежде всего в основной части (вблизи галереи) распределения давления для $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 0,1$ весьма близки друг к другу. Во-вторых, возмущение в задаче фильтрации с предельным градиентом захватывает конечную область, т. е. имеет место конечная скорость распространения возмущения; на границе зоны возмущения решение имеет угловую точку. Это свойство решения весьма сходно с обнаруженным Г. И. Баренблаттом поведением решений задач безнапорной фильтрации в сухой грунт [16] (см. также [19]) и имеет, очевидно, ту же природу. Можно убедиться, что обнаруженный характер решения вблизи границы области возмущения не связан с частной постановкой задачи, а присущ любому решению с начальным распределением

* Справедливость этого утверждения следует из обычных соображений анализа размерностей [191].

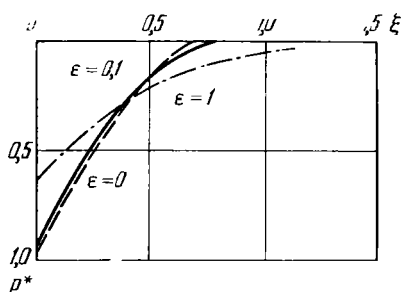


Рис. 9.1

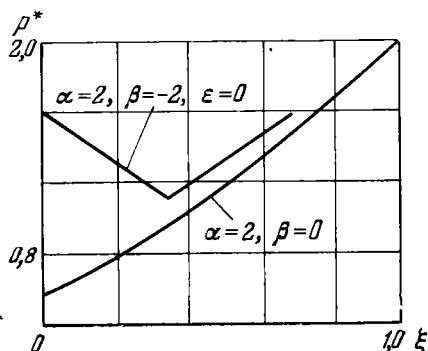


Рис. 9.2

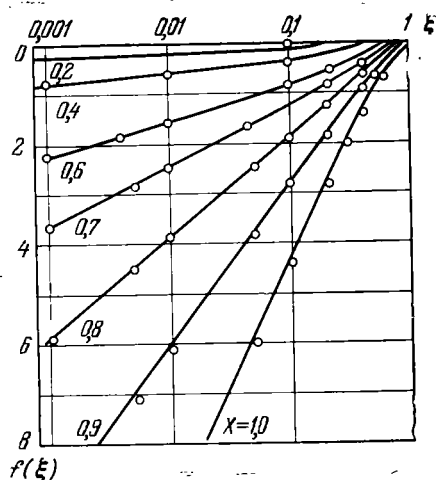


Рис. 9.3

$p(x, 0)$, удовлетворяющим условию $|\partial p(x, 0)/\partial x| < G$ [174, 176, 177]. Это обстоятельство используется при построении приближенных и численных решений неавтономных задач.

Если начальные условия соответствуют наличию движения (в данном случае $|\alpha| > 1$), то возмущение распространяется с бесконечной скоростью; характер решения для задачи об остановке потока ($\alpha = 0, \beta = 0$) и о встречном движении ($\alpha = 2, \beta = -2$) при фильтрации с предельным градиентом ($\varepsilon = 0$) виден из рис. 9.2.

2. Несложно получить также автомодельное решение задачи фильтрации с предельным градиентом в осесимметричном случае [80]. При этом уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial p}{\partial r} - G \right) \right],$$

$$\left(\left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| > G \right); \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad \left(\left| \frac{\partial p}{\partial r} \right| \leq G \right)^{\text{II}}$$

и имеет автомодельное решение при условии, что начальное давление постоянно $p(r, 0) = 0$ и дебит скважины пренебрежимо малого радиуса изменяется по закону

$$q = \lim_{r \rightarrow 0} \left(2\pi r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = C \sqrt{t}. \quad (1.13)$$

Решение имеет вид

$$p = \frac{C \sqrt{t}}{2\pi} f(\xi); \quad \xi = r/2\sqrt{\kappa t}, \quad (1.14)$$

где $f(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\xi f''(\xi) + (1 + 2\xi^2)f'(\xi) - 2\xi f(\xi) = y = \frac{2G \sqrt{x}}{c} \quad (1.15)$$

при условиях

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi f'(\xi) = 1; \quad f(\xi) \equiv 0 \quad (\xi \geq X);$$

$$f'(X) = 2G \sqrt{x}/c. \quad (1.16)$$

Решение указанной задачи находится численно, результаты расчетов и зависимость $X(y)$ показаны на рис. 9.3, 9.4 сплошными линиями ($Q = C/G$).

3. Отметим еще весьма простое автомодельное решение задачи нелинейной фильтрации при наличии свободной поверхности.

Рассматривая фильтрацию в сухой грунт, Г. И. Баренблатт [16] показал (для движения, следующего закону Дарси), что в случае одномерного прямолинейно-параллельного движения напор $h(x, t)$ является линейной функцией координаты x , если на границе пласта $x = 0$ напор изменяется линейно. Нетрудно проверить, что этот результат сохраняется при произвольном законе фильтрации.

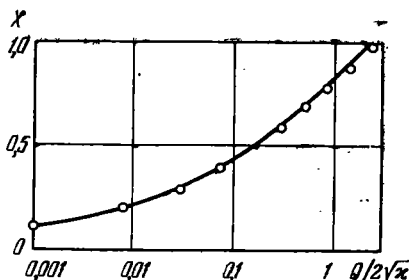


Рис. 9.4

Действительно, уравнения пологого безнапорного движения при нелинейном законе фильтрации имеют вид

$$u = -c\Psi\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right); \quad m \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial(hu)}{\partial x}, \quad (1.17)$$

где $h(x, t)$ — напор; $u(x, t)$ — скорость фильтрации в направлении оси x ; c — постоянная размерности скорости.

Нетрудно видеть, что система (1.17) имеет решение вида

$$h = At - Bx \quad (0 \leq x \leq At/B); \quad h = 0 \quad (x > At/B), \quad (1.18)$$

если постоянные A и B удовлетворяют соотношению

$$mA = Bc\Psi(B). \quad (1.19)$$

В частности, при движении с предельным градиентом $\Psi(h_x) \equiv (|h_x| - L_0)h_x / |h_x|$; $|h_x| \geq L_0$ и (1.19) принимает вид

$$mA = cB(B - L_0). \quad (1.20)$$

4. Значительно шире класс автомодельных решений при степенном законе фильтрации, изученный Г. И. Баренблаттом [16, 19]. Если движение в пласте вначале отсутствовало, то при таком

законе фильтрации автомодельны решения задачи о притоке к галерее или скважине при степенном законе изменения давления на галерее или дебита скважины.

Наиболее интересен случай пуска скважины с постоянным дебитом $Q = Q_0 = \text{const}$. В этом случае для степенного закона фильтрации с $\alpha > 1$ ($n < 1$) («псевдопластическое» поведение) для давления в скважине имеем

$$p_0 = a Q_0^{(1+n)/(3-n)} \cdot t^{(1-n)/(3-n)}, \quad (1.21)$$

причем коэффициент a пропорционален коэффициенту C в законе фильтрации (3.10, гл. I). Соотношение (1.21) открывает возможности определения параметров закона фильтрации в промысловых условиях (см. ниже, § 2).

§ 2. Некоторые неавтомодельные задачи движения аномальных жидкостей

Автомодельные решения соответствуют весьма специальным начальным и особенно граничным условиям и далеко не покрывают практических потребностей. При отыскании решения большинства задач приходится прибегать к приближенным методам, представляющим собой разновидности метода интегральных соотношений [17, 19]. При этом приведенные автомодельные решения имеют двойное значение. С одной стороны, они указывают на ряд качественных особенностей решения, например на существование конечной области движения после начала движения в первоначально невозмущенном пласте при фильтрации с предельным градиентом. С другой стороны, они позволяют проверить используемые приближенные решения. На рис. 9.3 и 9.4 точками показаны результаты расчетов соответствующих задач при помощи метода интегральных соотношений с использованием трехчленного приближения для потока жидкости через соосную со скважиной поверхность. Видно, что достигается весьма высокая точность приближения, достаточная для технических приложений. Поэтому в приводимых ниже решениях используется та же степень приближения.

1. Рассмотрим основную для приложений задачу о пуске скважины с постоянным дебитом при фильтрации с предельным градиентом.

Имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} q &= 2\pi r u(r, t) = - \frac{2\pi r k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r} - G \right); & p'_r > G; \\ q &= u = 0 \quad (p'_r \leq G); & \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial q}{\partial r} = - \frac{m}{K} \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.1)$$

с начальными и граничными условиями

$$q(r, 0) = p(r, 0) = 0; \quad q(0, t) = -Q = \text{const}; \quad Q > 0. \quad (2.2)$$

Будем искать приближенное решение задачи, задаваясь распределением расхода

$$\begin{aligned} q(r, t) &= Q(1 - r/l) \quad (l = l(t) \geq r > 0); \\ q(r, t) &= 0 \quad (r > l). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Используя первое уравнение (2.1) и заменяя второе уравнение (2.1) интегральным соотношением материального баланса, найдем

$$\begin{aligned} p(r, t) &= \frac{\mu Q}{2\pi k} \left[\ln \frac{r}{l} + \left(1 - \frac{2\pi k G l}{\mu Q} \right) \left(1 - \frac{r}{l} \right) \right] \quad (r \leq l); \\ l^2 + \frac{4\pi k G}{\mu Q} l^3 &= 12\kappa t. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Соотношения (2.4) позволяют легко исследовать характер изменения давления на скважине p_c при фильтрации с предельным градиентом. Если ρ — радиус скважины, то

$$p_c = p(\rho, t) = \frac{\mu Q}{2\pi k} \left[\ln \frac{\rho}{l} + 1 - \frac{2\pi k G l}{\mu Q} \right]. \quad (2.5)$$

(Здесь учтено, что практически сразу после пуска скважины $\rho \ll l$.)

Характер изменения давления в скважине оказывается существенно различным при различных временах. При малых временах

$$t \ll t^* = \frac{1}{12\kappa} \left(\frac{\mu Q}{2\pi k G} \right)^2 \quad (2.6)$$

имеем

$$l \ll l^* = \frac{\mu Q}{2\pi k G},$$

и характер изменения давления оказывается таким же, как и при линейной фильтрации, т. е.

$$p_c \sim - \frac{\mu Q}{4\pi k} \ln \frac{12\kappa t}{\rho^2} + \dots \quad (2.7)$$

Напротив, при достаточно больших временах $t \gg t^*$ имеем

$$l^* \ll l \approx \left(\frac{3\kappa \mu Q}{\pi k G} \right)^{1/3} \quad (2.8)$$

и

$$p_c \simeq p(\rho, t) = - G \left(\frac{3\kappa \mu Q}{\pi k G} \right)^{1/3} + \frac{\mu Q}{6\pi k} \ln \frac{\pi G k \rho^3}{3\mu \kappa t Q} + \frac{3\mu Q}{4\pi k}. \quad (2.9)$$

Таким образом, при больших временах закон падения давления изменяется с логарифмического на степенной ($p \sim ct^{1/3}$), причем коэффициент пропорциональности c возрастает с увеличением дебита Q как $Q^{1/3}$. В принципе это открывает возможность для обнаружения в пластовых условиях проявлений предельного градиента давления.

Для того чтобы отклонение от линейности можно было достаточно уверенно обнаружить, характерная длина l^* должна быть мала сравнительно с расстоянием между скважинами и другими характерными размерами пластовой системы L . Оценим этот размер для следующих характерных величин: $\mu = 8$ спуз, $k = 0.5$ дарси, $G = 300$ дин/см³ (0,03 ат/м), $Q = 10$ м²/сутки = $= 1.2$ см²/сек.

Имеем $l^* \approx 10^4$ см = 100 м.

Отметим, что

$$l^* = \frac{\mu Q}{2\pi k G} = \frac{Q}{2\pi \lambda} \quad (2.10)$$

Таким образом, для тех случаев, когда параметр $Q/\lambda L$ равен единице или менее, отношение l^*/L порядка 0,2 или менее. Поэтому для тех месторождений, для которых наличие предельного градиента давления существенно изменяет характер течения в пласте (см. гл. IV—V), нелинейность закона фильтрации также существенно изменяет вид кривых изменения давления при пуске скважины.

2. До сих пор речь шла об изменении давления при пуске скважины. Обычная в практике исследования скважин состоит в обратном: исследуется не падение давления при пуске скважины в эксплуатацию, а восстановление давления при остановке ранее эксплуатировавшейся скважины (т. е. при прекращении отбора из нее). Если рассматривается плоско-радиальное движение с предельным градиентом, то стационарное движение удовлетворяет системе (2.1) с $q = Q = \text{const}$, а нестационарное движение — той же системе (2.1). Важно при этом, что и в стационарном, и в нестационарном движении градиент давления превосходит предельный градиент, так что система (2.1) оказывается линейной. Отсюда сразу следует, что изменение давления после остановки скважины при движении с предельным градиентом следует тем же закономерностям, что и при движении, следующем закону Дарси. Иными словами, нелинейность закона фильтрации с предельным градиентом не может быть обнаружена при исследовании скважин методом восстановления давления.

3. Нетрудно видеть, что восстановление давления при фильтрации с предельным градиентом происходит до тех пор, пока градиент давления в каждой точке пласта не достигнет предельного значения G . В случае кругового пласта с центральной скважиной восстановление давления происходит, очевидно, вплоть до достижения распределения

$$p_1(r) = P - G(R - r), \quad (2.11)$$

где P — давление на контуре питания ($r = R$).

В частности, давление на скважине ($r = \rho \ll R$) окажется равным

$$p_1(\rho) \approx P - GR. \quad (2.12)$$

С другой стороны, если бы первоначальное движение происходило в направлении от скважины к контуру питания, то после прекращения движения распределение давления имело бы вид

$$\begin{aligned} p_2(r) &= P + G(R - r); \\ p_2(\rho) &= P + GR. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Различие между давлениями $p_1(\rho)$ и $p_2(\rho)$ (названными нижепредельным и верхнепредельным давлениями) было положено в основу предложенного в [1, 2] метода определения предельного перепада давления $\Delta p_0 = GR$ и истинного пластового давления P при движении вязкопластических нефтей в промысловых условиях.

Согласно этому методу для определения Δp_0 и P вначале скважина останавливалась и после установления давления определялась величина $p_1(\rho)$. Затем в скважину доливалось некоторое количество нефти и после установления давления измерялась его величина, которая приравнивалась верхнепредельному давлению $p_2(\rho)$. После этого P и Δp_0 определялись по очевидным формулам

$$\Delta p_0 = [p_2(\rho) - p_1(\rho)]/2; \quad P = [p_2(\rho) + p_1(\rho)]/2. \quad (2.14)$$

Нетрудно видеть, что описанный метод связан с предположением, что закачка любого количества жидкости в пласт немедленно изменяет распределение давления сразу во всем пласте с нижепредельного до верхнепредельного. Между тем пласт обладает конечной упругостью и перестройка давления в любой его конечной части требует закачки конечного объема жидкости. Отсюда следует, что закачка в пласт не слишком большого объема жидкости V приведет к изменению давления лишь в ближайшей к скважине части пласта, причем после прекращения движения предельное распределение давления будет иметь вид ломаной $A'BC$ (рис. 9.5). Приравнявая количество закачанной жидкости изменению массы жидкости в пласте в результате упругого деформирования пласта и жидкости, получим

$$R' = \left(\frac{3VK}{2\pi mhG} \right)^{1/3}, \quad (2.15)$$

где h — мощность пласта. При этом для давления в скважине имеем

$$p_\rho = p_1(\rho) + 2GR' = p_1(\rho) + \left(\frac{12VK}{\pi mh} G^2 \right)^{1/3}. \quad (2.16)$$

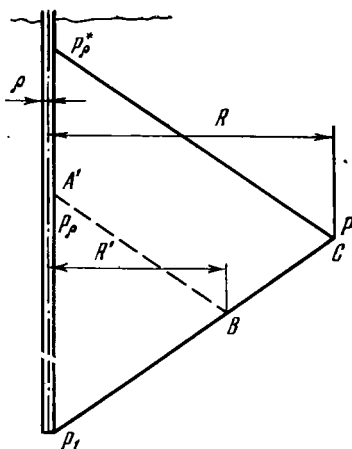


Рис. 9.5

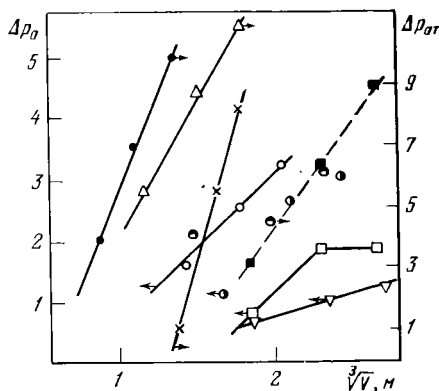
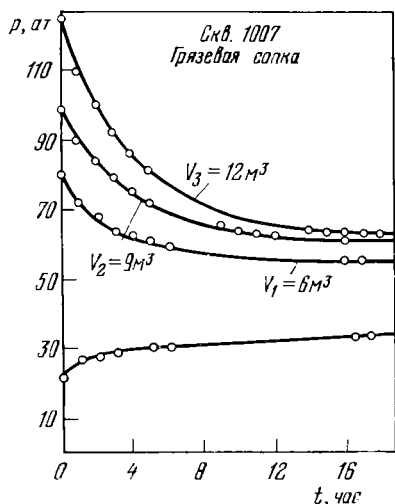


Рис. 9.6

Рис. 9.7

Таким образом, превышение давления на скважине над нижепредельным линейно зависит от величины $V^{1/3}$, причем по коэффициенту пропорциональности можно в принципе оценить величину предельного градиента G . Когда граница R' зоны возмущения достигнет контура питания R , давление в скважине станет равным верхнепредельному p_c^* . Измеряя и подставляя в формулы (2.15) и (2.16), можно оценить пластовое давление P и предельный перепад Δp_0 . Оценивая R , отсюда можно оценить и $G \sim \Delta p_0/R$.

Отметим, что нарушение линейности зависимости $\Delta p_0 \sim V^{1/3}$ может свидетельствовать о неоднородности пласта в радиальном направлении.

4. Видоизмененная методика прошла первоначальное опробование на нескольких месторождениях Азербайджана (С. Д. Муштафаев), Узбекистана (Н. Р. Рахимов) и Казахстана (В. И. Ильяев) [75].

На рис. 9.6 показаны характерные кривые изменения давления в скважине после прекращения отбора (нижняя кривая) и после закачки в нее различных объемов жидкости; на рис. 9.7 приведены сводные данные по зависимости $\Delta p_0 - V^{1/3}$ для группы исследованных скважин. Различные значки соответствуют различным скважинам.

Из приведенных данных видно, что основной вывод о зависимости замеренной величины Δp_0 от объема V закачки подтверждается. Далее в большинстве исследованных случаев стабилизация давления не наступила, т. е. измеренные значения Δp_0 заведомо ниже фактически существующих.

Полученные значения Δp_0 достаточно велики (1–10 ат), что позволяет сделать вывод о наличии в пластовых условиях предельного градиента давления порядка 10^2 – 10^3 дин/см³ (10^{-2} – 10^{-1} ат/м). Наконец, отметим, что резко различный по исследованным сква-

жинам темп нарастания статического перепада Δp_0 с ростом объема закачки V может быть связан не только с различием в значениях предельного градиента давления G , но и с различием в эффективных значениях модуля объемного сжатия $K_{\text{эф}}$. В месторождениях, разрабатываемых на режиме растворенного газа (месторождения Ферганской долины), эффективная сжимаемость пластовой системы может оказаться резко повышенной по сравнению с сжимаемостью пластовой системы, насыщенной жидкостью. В этом случае для достижения верхнепредельного давления p_* может потребоваться закачка недостижимо большого объема жидкости. Так, при $G = 200$ дин/см³ (0,02 ат/м), $\kappa = kK/m\mu = 3 \cdot 10^3$ см²/сек., $k = 1$ дарси, $K \approx 5 \cdot 10^9$ дин/см² $\approx 5 \cdot 10^3$ ат при $m = 0,2$, $\mu = 8$ спуз, $h = 10$ м, $R = 200$ м объем закачки к моменту стабилизации составляет 64 м³, наличие в поровом пространстве 5% газа при давлении 50 ат снижает $K_{\text{эф}}$ до ~ 800 ат и увеличивает необходимый объем примерно в 6 раз.

5. Согласно теории движения с предельным градиентом движение полностью прекращается по достижении предельного значения градиента давления G и соответствующее распределение давления сохраняется неограниченно долго. Очевидно, последний вывод связан с полным пренебрежением возможностью движения при градиентах давления меньших G и окажется неверным, если движение при этом все же возможно, хотя бы и с очень малыми скоростями.

Будем рассматривать одномерное плоско-радиальное движение и допустим, что закон фильтрации имеет вид

$$\begin{aligned} u &= -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r} - G \right) - \frac{k}{\mu} \varepsilon \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right); & \varepsilon \ll G \left(\frac{\partial p}{\partial r} > G \right); \\ u &= -\frac{k}{\mu} \varepsilon \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) & \left(0 < \frac{\partial p}{\partial r} \leq G \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

При этом имеем для давления $p(r, t)$ уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial p}{\partial r} - G \right) \right] + \frac{1}{r} \kappa \varepsilon \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) + \kappa \varepsilon' \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial r} > G \right), \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= \kappa \varepsilon' \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \kappa \varepsilon \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad \left(\frac{\partial p}{\partial r} \leq G \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Если рассматривается задача о пуске скважины с постоянным дебитом, т. е. имеют место условия

$$\begin{aligned} p(r, 0) &= 0; \\ q(0, t) &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(2\pi \frac{k}{\mu} r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = Q = \text{const}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

то можно показать, что поток жидкости через соосную со скважиной поверхность

$$q(r, t) = 2\pi r u(r, t) \quad (2.20)$$

является при любом t убывающей функцией r и при любом r возрастающей функцией t [65]

$$\frac{\partial q}{\partial t} > 0, \quad \frac{\partial q}{\partial r} < 0. \quad (2.21)$$

Отсюда легко следует, что

1. Область значений r , в которой выполняется первое уравнение (2.18), конечна;

$$r \leq R < \frac{Q}{2\pi u_0}; \quad u_0 = \frac{k}{\mu} \varepsilon(G). \quad (2.22)$$

2) Можно указать такое время t_1 , что $|Q - q(r, t)| / Q < \delta$ при $t > t_1$, где δ — любое заданное малое число (r фиксировано).

3) Можно указать такое значение $t_R > t_1$, что для любых двух точек $r_1, r_2 < R$

$$\|p(r_2, t') - p(r_1, t')\| - \|p(r_2, t'') - p(r_1, t'')\| < \delta \quad (2.23)$$

при $t', t'' > t_R$.

Полагая r_1 равным радиусу скважины ρ , а r_2 — равным R , убеждаемся, что вся область $r < R$ не вносит вклада в асимптотический характер изменения давления на скважине $p(\rho, t)$ при $t \rightarrow \infty$. Последнее означает, что асимптотика изменения давления при $t \rightarrow \infty$ полностью определяется характером малой поправки $\varepsilon(\partial p / \partial r)$ в законе фильтрации. Легко исследовать асимптотику изменения давления, полагая ε степенной функцией. В этом случае можно воспользоваться как методом интегральных соотношений, так и непосредственно автомодельным решением задачи, полученным в работе [16].

Не останавливаясь на деталях, приведем основной результат: если при малых значениях $\partial p / \partial r$ закон фильтрации имеет вид

$$u = c \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^\alpha, \quad (2.24)$$

то асимптотика изменения давления имеет вид

$$p(r, t) \approx -\text{const} \cdot Q^{\frac{1+\alpha}{3\alpha-1}} \cdot t^{\frac{\alpha-1}{3\alpha-1}} + \dots \quad (2.25)$$

Таким образом, имеет место прямая взаимосвязь между показателем степени в законе фильтрации α , порядком роста $p(r, t)$ при $t \rightarrow \infty$ и показателем Q в коэффициенте выражения (2.25). Последнее обстоятельство представляет наибольший интерес, поскольку открывает возможность оценки показателя α по данным промысловых наблюдений. Как правило, промысловые исследования нестационарного притока заканчиваются построением зависимостей $\Delta p \sim \ln t$, которые затем аппроксимируются прямыми, и по наклону прямых определяется гидропроводность пласта

$$\frac{kh}{\mu} = \frac{Q}{4\pi} \left/ \frac{d\Delta p}{d(\ln t)} \right. \quad (2.26)$$

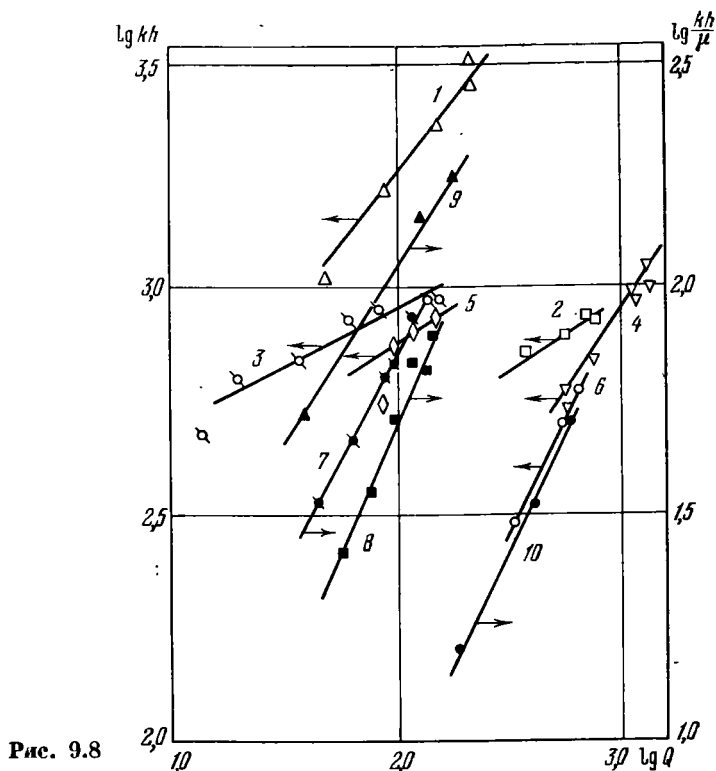


Рис. 9.8

Многие исследования последних лет показали, что величина определенной таким образом гидропроводности зависит от дебита Q , при котором проводится исследование [30, 128, 45, 59, 94, 61, 62]. Естественно попытаться проанализировать эти результаты, исходя из соотношения (2.26). Ряд экспериментальных данных такого рода представлен на рис. 9.8 в координатах $\lg Q - \lg kh/\mu$. Здесь собраны данные по следующим скважинам: 1 — скв. 1608, 2 — скв. 1544, 3 — скв. 1529, 4 — скв. 367, 5 — скв. 1288, 6 — скв. 1246 (все скважины Туймазинского месторождения [94]), 7 — скв. 4429, 8 — скв. 4264 (Ромашкино, [62]), 9 — скв. 1418, 10 — скв. 600 (Узень, данные В. И. Ильева).

Видно, что значительная часть данных согласуется с зависимостью (2.26) и аппроксимируется в двойных логарифмических координатах прямыми. Вместе с тем приведенные результаты заведомо не являются окончательными и нуждаются в уточнении. Более того, отдельные данные (например, данные по скв. № 367, 1246) указывают на более резкую зависимость, чем те, которые можно получить на основании использованных степенных аппроксимаций. Возможно, это связано с тем, что для этих скважин имеет

место наложение эффектов, связанных с нелинейностью закона фильтрации, и эффектов, обусловленных изменением забойного давления (скважины, для которых характерно аномальное поведение, являются нагнетательными, и для них увеличение дебита сопровождается увеличением забойного давления, что может приводить к увеличению гидравлической проводимости прискважинной зоны) [14, 83, 157—159].

В целом приведенные данные свидетельствуют о проявлении в пластовых условиях нелинейности закона фильтрации. При этом окончательный вид нелинейности определяется взаимодействием эффектов нелинейной фильтрации и неоднородности пласта подобно тому, как это было рассмотрено выше для случая слоистого пласта.

6. Выше уже было сказано, что закономерности изменения давления при пуске скважины с постоянным дебитом и при остановке ее после работы на установившемся режиме резко различны между собой, коль скоро рассматривается фильтрация с предельным градиентом; особенно велико различие между ними в отношении асимптотического закона изменения давления. Картина меняется, если допустить возможность движения при градиентах давления, меньших предельного, хотя бы и с малыми эффективными проницаемостями. Для кусочно-линейного закона фильтрации, описывающего осредненное движение в двухслойном пласте, сопоставление кривых изменения давления при пуске и остановке скважины произведено в работе [76]. Характерно, что если даже движение при малых скоростях происходит с весьма малыми эффективными проницаемостями (~ 0.1 от проницаемости при больших скоростях), кривые восстановления и стабилизации давления оказываются весьма близкими. Это служит косвенным оправданием применения полученных выше соотношений для анализа кривых восстановления давления.

7. Обширные исследования нестационарной фильтрации при нелинейном законе сопротивления выполнены за последние годы в Казанском государственном университете; эти исследования изложены в книге Ю. М. Молоковича и Э. В. Скворцова [144], а также в ряде статей [139, 141—143, 145, 222, 229]. Особый интерес представляет осуществленное Ю. А. Корнильцевым и Ю. М. Молоковичем электромоделирование нестационарных задач фильтрации с предельным градиентом. Отсылая читателя за деталями к оригинальным публикациям [99, 100, 101], отметим лишь, что таким способом оказалось возможным исследовать распространение по пласту колебаний давления, что не удастся сделать существующими приближенными методами.

Наряду с указанными выше получено значительное число точных и приближенных решений задач нелинейной нестационарной фильтрации, представляющих интерес с методической точки зрения или в связи с определением параметров пласта [5, 39, 81, 162, 173—175, 195, 230, 237, 265].

Заключение

Из рассмотренных примеров ясно, что влияние предельного градиента давления на характер течения тем больше, чем меньше средняя скорость и неоднородность потока, обусловленная геометрией расстановки скважин и неоднородностью пласта. Первый вывод качественно очевиден из общих соображений, однако проведенные расчеты размеров застойных зон (гл. IV—VI) позволяют дать ему количественную формулировку. Если обозначить через U характерную скорость фильтрационного потока (например, скорость на бесконечности или скорость, получаемую делением интенсивности источника на характерный размер конфигурации расстановки скважин, то мерой интенсивности проявления эффектов предельного градиента будет отношение $a = U/\lambda$; чем больше a , тем при той же геометрии меньше нелинейные эффекты (характеризуемые, например, относительной площадью застойных зон). Однако если задаться некоторым допусковым значением относительной площади застойных зон, то отвечающее ему критическое значение параметра a будет тем больше, чем менее однороден поток. Эту закономерность легко проследить, рассматривая переход от течения, создаваемого прямолинейной цепочкой скважин в неограниченном пласте, к течению, создаваемому такой же цепочкой вблизи непроницаемого экрана, или последовательность течений, создаваемых кольцевыми батареями скважин при различном их числе (рис. 4.5, 4.6, 5.1 ÷ 5.5). Из сопоставления рис. 4.5 и 4.6 видно, что заметные зоны вблизи цепочек образуются лишь при значениях параметра $a \sim 0,1-0,5$, тогда как в цепочке вблизи экрана застойная зона может занимать значительную часть пространства между скважинами и экраном уже при $a \approx 1$.

Остановимся еще на одном аспекте движения с предельным градиентом. Если мы рассматриваем однородный поток с некоторой скоростью U , то вне зависимости от величины этой скорости застойные зоны не образуются. Возникает впечатление, что однородному потоку предельный градиент «не страшен». Однако это впечатление исчезает, если рассмотреть среду со слабой неоднородностью. Допустим, что среда состоит из основной среды, характеризуемой параметрами k и G , и включений с параметра-

ми k' и G' ; предполагая, что градиент давления z одинаков в обеих компонентах среды, получим $z = \mu/k (U + G)$, и если $z < G'$, то движение во включениях происходить не будет. Отсюда видна роль средней скорости при движении с предельным градиентом: чем меньше скорость, тем меньшие различия в значениях предельного градиента будут приводить к прекращению движения во включениях. Это хорошо видно на примере течения в слоистом пласте (гл. VIII). Можно сказать, что поле скоростей при движении с предельным градиентом оказывается неустойчивым по отношению к возмущению параметров однородного потока.

Таким образом, в реальных условиях можно ожидать проявления резкой неоднородности потока во всех случаях, когда движение происходит со скоростями, меньшими характерной скорости (т. е. при значениях $a < 1$) (см. вывод в [123]).

Далее, анализ имеющихся данных (часть которых приведена в гл. I и IX) показывает, что на ряде месторождений реально наблюдаются значения предельного градиента в сотни дин/см³ (несколько сотых долей атмосферы на метр). При обычных расстояниях между скважинами в сотни метров эти значения отвечают предельным (начальным) перепадам порядка $10^6 \div 10^7$ дин/см³ ($1 \div 10$ ат), т. е. примерно 10% от полного значения гидродинамического перепада. Легко убедиться, что это соответствует тому, что на контуре питания достигается значение относительной скорости $U/\lambda = Q/2\pi k h \lambda R = 1$. Тем самым уже такое значение предельного перепада указывает на существенность эффектов предельного градиента при наличии неоднородности потока или естественной неоднородности среды. По существу сказанное выше относительно движения однородной жидкости переносится и на задачи вытеснения нефти водой (гл. VII).

При малых скоростях влияние предельного градиента сказывается на всех структурных уровнях, начиная с отдельных элементов пористой среды и кончая масштабами месторождения. Основным параметром, характеризующим процесс вытеснения, является отношение характерной скорости вытеснения к скорости $\lambda_1 = k_1 G / \mu_1$, где k_1 и μ_1 — проницаемость воды и вязкость воды. Обычно проницаемость для воды в промытой зоне k_1 значительно (в 2—3 раза) меньше абсолютной проницаемости среды, но вязкость воды настолько меньше вязкости нефти, что $\lambda_1 > \lambda$ и приведенные оценки роли предельного градиента относятся и к данному случаю. На микроуровне влияние предельного градиента у вытесняемой фазы сказывается в снижении коэффициента вытеснения (как текущего, так и конечного) по сравнению с вытеснением чисто вязкой жидкости и зависимости величины этого снижения от скорости вытеснения (полнота вытеснения тем ниже, чем меньше скорость). Как показывают расчеты гл. VII (рис. 7.2), снижение относительной скорости вытеснения ниже значений $\bar{u} = 1$ может привести к заметному снижению полноты вытеснения и необратимым потерям нефти.

Другой тесно связанный с предыдущими момент — это влияние предельного градиента давления на устойчивость вытеснения. Новым моментом здесь является дестабилизация течения при низких скоростях вытеснения в широком диапазоне «благополучных» отношений вязкостей (рис. 7.4). В зависимости от отношения вязкостей скорости дестабилизации могут быть относительно большими, напротив, при низких скоростях $\bar{u} \approx 1$ дестабилизируются даже течения с отношением вязкостей 0,5. (Для вязких жидкостей дестабилизация не имеет места даже при значительно меньших значениях отношения вязкостей (вплоть до $\sim 0,15$).)

Полнота охвата пласта заводнением, оцениваемая по схеме предельно-равновесных целиков (§§ 4,5 гл. VII), качественно следует тем же закономерностям, что и полнота охвата пласта течением при движении однородной жидкости. Дополнительно отметим, что сказанное о «неустойчивости» однородного движения при малых скоростях по отношению к изменению параметров среды справедливо и по отношению к вытеснению (и, возможно, еще в большей степени, благодаря дестабилизации процесса вытеснения), что видно из примеров, приведенных в гл. VII.

Таким образом, основной вывод в отношении разработки месторождений вязкопластических нефтей в однородных пластах заключается в том, что качественные показатели процесса разработки должны улучшаться с увеличением интенсивности разработки *. Наиболее резко это проявляется при низких средних скоростях процесса, когда относительная скорость U/λ , определенная указанным ранее способом, близка к единице или меньше этого значения (о некоторых исключительных случаях будет сказано ниже).

Далее, при сохранении средних темпов разработки показатели процесса существенно зависят от степени однородности потока: следует стремиться к максимальной однородности потока, избегая резких поворотов. В частности, встречающаяся изредка схема расстановки скважин симметричными рядами с линией симметрии между рядами заведомо нерациональна, поскольку вся прилегающая к линии симметрии область исключается из разработки уже при небольших значениях предельного градиента.

В неоднородных пластах эффекты предельного градиента усиливаются благодаря изменению проницаемости и предельного градиента от точки к точке среды. И в этом случае увеличение темпа разработки благоприятно сказывается на степени охвата пласта движением. Однако приведенные расчеты для слоистого пласта ясно показывают, что увеличение темпа способно увеличить производительность скважин и эффективную мощность пласта, но не способно само по себе, во всяком случае при резко гетерогенном пласте, существенно повысить основные технологические показатели — безводную и конечную нефтеотдачу. Анализ

* Этот вывод в связи с качественным рассмотрением роли нелинейных эффектов в процессе разработки сделан в работах [155, 156].

результатов расчета и данных по нефтеотдаче позволяет утверждать, что в гетерогенном пласте нефтеотдача определяется взаимодействием активного вытеснения под действием гидродинамического перепада давления и процесса капиллярной пропитки, обеспечивающего извлечение нефти из слабопроницаемых участков, обходимых основным потоком. Поэтому для гетерогенного пласта увеличение скорости вытеснения само по себе может оказаться нерациональным. Для однородного пласта такое увеличение выгодно, за исключением того случая вытеснения в наклонном пласте, когда устойчивость вытеснения обусловливается разностью плотностей жидкостей и увеличение скорости вытеснения может привести к дестабилизации.

Отметим еще, что при малой интенсивности разработки может происходить разделение залежи застойными зонами на не взаимодействующие между собой части. При заводнении залежи взаимодействие воды может оказаться блокированным перепадом давления в застойных зонах. При законтурном обводнении это может привести к большим непроизводительным потерям закачиваемой жидкости (см. [204]).

Литература

1. Аббасов А. А., Мустафаев С. Д., Балакиров Ю. А. Методы исследования пластов, содержащих вязко-пластичные жидкости.— Труды Азинефтехим, 1967, вып. XXVI, 77—88.
2. Аббасов А. А., Мустафаев С. Д. Новый прием определения статического давления в пластах, содержащих вязкопластическую нефть.— Азербайджанское нефтяное хозяйство, 1968, № 4, 23—25.
3. Аванесов И. Г. Особенности вытеснения и механизм нефтеотдачи при разработке месторождений нефтей повышенной вязкости. Автореферат канд. диссертации. М., ИГиРГИ, 1969.
4. Агаева С. Е., Гусейн-заде М. А., Мирзаджанзаде А. Х. Об одной задаче взаимодействия пластов.— Изв. вузов, «Нефть и газ», 1968, № 10, 61—63.
5. Алишаев М. Г. К определению градиента давления сдвига в промышленных условиях.— Уч. зап. Дагестанского пед. ин-та, 1969, № 5, 172—178.
6. Алишаев М. Г. О стационарной фильтрации с начальным градиентом.— Теория и практика добычи нефти. Ежегодник. М., «Недра», 1968, 202—211.
7. Алишаев М. Г., Бернадишгер М. Г., Ентов В. М. Влияние предельного градиента на потери нефти при вытеснении ее водой.— Сб. «Вопросы нелинейной фильтрации и нефтегазоотдачи при разработке нефтяных и газовых месторождений». М., ИГиРГИ, 1972, 15—32.
8. Алишаев М. Г., Вахитов Г. Г., Гехтман М. М., Глузов И. Ф. О некоторых особенностях фильтрации пластовой девонской нефти при пониженных температурах.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3, 166—169.
9. Алишаев М. Г., Вахитов Г. Г., Глузов И. Ф., Фоменко И. Е. Особенности фильтрации пластовой девонской нефти при пониженных температурах.— Теория и практика добычи нефти. Ежегодник. М., «Недра», 1966, 214—226.
10. Алишаев М. Г., Ентов В. М., Сегалов А. Е. Элементарные решения плоских задач нелинейной фильтрации.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3, 114—123.
11. Аравин В. И., Нумеров С. Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М., Гостехиздат, 1953.
12. Афонин А. А. Об одном применении метода годографа к решению задач нелинейной установившейся фильтрации одного частного вида.— Сб. «Гидродинамика», М., 1970, 49—53.
13. Ахмедов З. М., Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Мирзаджанзаде А. Х. О нелинейных эффектах при фильтрации газа.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5, 103—109.
14. Бая А., Богомолова А. Ф., Максимов В. А., Николаевский В. Н., Оганджанянц В. Г., Рыжик В. М. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкостей. М., Гостоптехиздат, 1962.
15. Баренблатт Г. И. Фильтрация двух несмешивающихся жидкостей в однородной пористой среде.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5, 144—151.

16. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости в пористых средах.— ПММ, 1952, т. 16, вып. 1, 67—78.
17. Баренблатт Г. И. О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме.— Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 9, 35—49.
18. Баренблатт Г. И., Ентов В. М. Неравновесные эффекты при фильтрации несмешивающихся жидкостей.— Сб. «Численные методы расчетов фильтрации многофазной несжимаемой жидкости». Новосибирск, 1972, 33—43; сб. «Тепло- и массоперенос», т. 3. Минск, 1972, 18—29.
19. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М., «Недра», 1972.
20. Баренблатт Г. И., Мамедов Ю. Г., Мирзаджанадзе А. Х., Швецов И. А. Неравновесные эффекты при фильтрации вязкоупругих жидкостей.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 5, 76—83.
21. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции (тт. 1—3). «Наука», 1965—1967.
22. Белаш П. М. Экстремальные принципы при расчете дебитов несовершенных скважин.— Труды МНИ им. Губкина, вып. 12. Гостонтехиздат, 1953, 201—206.
23. Бернадинер М. Г. О предельной конфигурации застойных зон при вытеснении вязко-пластичной нефти водой.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 6, 146—149.
24. Бернадинер М. Г. Теоретические вопросы разработки месторождений вязкопластичных нефтей. Автореферат канд. диссертации. М., ИГиРГИ, 1971.
25. Бернадинер М. Г., Ентов В. М. О взаимном вытеснении несмешивающихся жидкостей при нелинейной фильтрации.— ПМТФ, 1968, № 2, 110—114.
26. Бернадинер М. Г., Ентов В. М. Некоторые задачи теории совместного движения несмешивающихся вязкопластических жидкостей в пористой среде.— Сб. «Тепло- и массоперенос», т. 3. Минск, 1968, 293—304.
27. Бернадинер М. Г., Ентов В. М. Некоторые точные решения плоских задач фильтрации с предельным градиентом.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2, 168—172.
28. Бернадинер М. Г., Ентов В. М., Турецкая Ф. Д. Численное решение стационарных задач нелинейной фильтрации. Препринт № 39. М., ИПМ АН СССР, 1974.
29. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М., ИЛ, 1961.
30. Близов А. Ф., Зайтуллин Н. Г. Об изменении параметров пласта в нагнетательных скважинах.— Труды ТатНИИ, вып. 10. «Недра», 1967, 269—277.
31. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. М., «Мир», 1971.
32. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
33. Вахитов Г. Г., Мусин М. М., Фаткуллин А. Х. Численное решение задачи фильтрации вязко-пластической жидкости в мощном пласте.— Сб. «Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости». Новосибирск, Изд. СО АН СССР, 1972.
34. Веригин Н. Н., Васильев С. В. Фильтрация из каналов и водохранилищ в грунтовые воды аэрации с учетом начального градиента.— Сб. «Динамика сплошной среды», вып. 2. Новосибирск, «Наука», 1969, 114—122.
35. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М., «Наука», 1964.
36. Воронин В. П. О нелинейной фильтрации через пористое полуцилиндрическое тело со шпунтом при степенном законе сопротивления.— Инж. физ. журн., 1971, т. 20, № 4, 717—724.

37. Воронин В. И., Самохвалов В. В. О нелинейной фильтрации жидкости при степенном законе сопротивления.— Инж. физ. журн., 1970, т. 19, № 4, 722—728.
38. Воронин В. И., Фалеев В. В. О нелинейной фильтрации с бесконечной пепочкой источников.— Сб. «Гидродинамика лопаточных машин и общая механика», вып. 1. Воронеж, 1971 (72), 141—144.
39. Гаджиев Л. М. Автомодельное решение задачи о нестационарной фильтрации газа в пласте при нелинейном (двучленном) законе сопротивления.— ПМТФ, 1968, № 6, 159—160.
40. Газов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз. М., 1963.
41. Гейман М. А., Фридман Р. А. Влияние структурно-механических свойств нефти на остаточную нефтенасыщенность.— Нефтяное хозяйство, 1956, № 9, 29—34.
42. Гейман М. А., Фридман Р. А. Вытеснение Ромашкинской нефти из несцементированных песков при разных температурах.— Труды Ин-та нефти АН СССР, 1958, т. XI, 193—208.
43. Георгиев Шт. И. О движении вязкопластических жидкостей в пористой неоднородной среде.— ПМТФ, 1966, № 1, 133—136.
44. Гладышев С. В. О фильтрации воды через глинобетон при больших градиентах.— Труды Ленингр. политехн. ин-та, 1966, № 274, 164—169.
45. Глазков А. А., Блажевич В. А., Мазитов И. Ф. Изучение влияния нагнетания воды в нагнетательные скважины на характер охвата пласта притоком в эксплуатационных скважинах.— Труды УфНИИ, 1969, вып. 27, 407—416.
46. Горбунов А. Т., Ефремова Н. А., Хорнеш Я. Фильтрация асфальтеномолотых нефтей в пористых средах.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 6, 202—205.
47. Гудок Н. С. Изучение физических свойств пористых сред. М., «Недра», 1970.
48. Горбунов Р. С., Касимов А. Ф., Мураджанзаде А. Х. Гидродинамика вязкопластических сред.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 3, 171—179.
49. Девликамов В. В., Еникеев Р. Г., Хабибуллин З. А. Влияние растворенного газа на флокуляцию асфальтенов в нефти.— Изв. вузов, «Нефть и газ», 1969, № 8, 47—50.
50. Девликамов В. В., Салимгареев Т. Ф. О тиксотропности пластовой нефти.— Изв. вузов, «Нефть и газ», 1973, № 9, 43—45.
51. Девликамов В. В., Хабибуллин З. А. Влияние азота на некоторые свойства нефти.— Труды Уфимского нефтяного ин-та, вып. 6. М., «Недра», 1970, 49—51.
52. Девликамов В. В., Хабибуллин З. А. Структурно-механические свойства нефтей некоторых месторождений Башкирии.— Нефтяное хозяйство, 1968, № 10, 38—41.
53. Девликамов В. В., Хабибуллин З. А. Реологические свойства нефтей, содержащих растворенный азот.— Нефтяное хозяйство, 1969, № 12.
54. Девликамов В. В., Хабибуллин З. А. Коллоидные свойства нефтей.— Труды Уфимского нефтяного ин-та, вып. 5. М., «Недра», 1969, 33—46.
55. Девликамов В. В., Хабибуллин З. А. Структурная вязкость пластовой нефти.— Труды Уфимского нефтяного ин-та, вып. 5. М., «Недра», 1969, 81—86.
56. Девликамов В. В., Хабибуллин З. А., Еникеев Р. Г. Структурообразование в пластовых нефтях.— Труды Уфимского нефтяного ин-та, вып. 6. М., «Недра», 1970, 35—49.
57. Девликамов В. В., Хабибуллин З. А. Влияние дегазации пластовых нефтей на их структурные свойства.— Сб. «Применение неньютоновских систем в добыче нефти». М., ВНИИОЭНГ, 1970, 83—89.
58. Девликамов В. В., Хабибуллин З. А. Структурные свойства пластовых нефтей.— Сб. «Применение неньютоновских систем в добыче нефти». М., ВНИИОЭНГ, 1970, 78—83.
59. Демин Н. В., Кисляков Ю. П., Морозов В. Т. О зависимости прони-

- цаемости пористой среды от градиента давления. — Нефтяное хозяйство, 1966, № 12, 36—38.
60. *Дияшев Р. Н.* Исследование совместно эксплуатирующихся пластов по изменению дебита. Автореферат канд. диссертации. М., МИНХиГП, 1969.
 61. *Дияшев Р. Н.* Влияние неньютоновских свойств газа, воды и нефти в пористой среде на результаты исследования скважин по кривым восстановления давления. — Нефтяное хозяйство, 1973, № 3, 30—32.
 62. *Дияшев Р. Н., Зайнуллин Н. Г.* Исследование гидродинамической характеристики пластов при повышенных давлениях нагнетания. — Нефтяное хозяйство, 1970, № 9, 53—57.
 63. *Евгеньев А. Е.* Об относительных фазовых проницаемостях при фильтрации двухкомпонентных смесей. — Изв. вузов, «Нефть и газ», 1965, № 1, 300—301.
 64. *Ентов В. М.* Об одной задаче нелинейной нестационарной фильтрации. — Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и маш., 1963, № 5, 141—143.
 65. *Ентов В. М.* Теоремы сравнения для уравнений нестационарной фильтрации. — ПММ, 1965, т. 29, вып. 1, 200—205.
 66. *Ентов В. М.* О некоторых двумерных задачах теории фильтрации с предельным градиентом. — ПММ, 1967, т. 31, № 5, 820—833.
 67. *Ентов В. М.* Об одной задаче фильтрации с предельным градиентом, допускающей точное решение. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3, 487—492.
 68. *Ентов В. М., Салганик Р. Л.* О решении плоских задач фильтрации с предельным градиентом методом малого параметра. — ПММ, 1968, т. 32, вып. 5, 844—857.
 69. *Ентов В. М.* Двумерные и нестационарные одномерные задачи движения неньютоновских жидкостей в пористой среде. — Нефтяное хозяйство, 1968, № 10, 47—53.
 70. *Ентов В. М.* О парных интегральных уравнениях, возникающих в задачах фильтрации с предельным градиентом. — ПММ, 1970, т. 34, вып. 3, 532—542.
 71. *Ентов В. М.* Об аналогии плоской фильтрации и продольного сдвига нелинейно-упругих и пластических тел. — ПММ, 1970, т. 34, вып. 1, 162—171.
 72. *Ентов В. М.* Решение задач фильтрации с предельным градиентом в случае неоднозначности отображения. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 1, 45—59.
 73. *Ентов В. М.* Исследования фильтрации аномальных жидкостей с приложениями к разрастке месторождений нефти с предельным градиентом. Автореферат докторской диссертации. М., ИГиМ АН СССР, 1972.
 74. *Ентов В. М., Одишария М. Г.* О некоторых задачах определения размеров предельно-равновесных циклов при вытеснении вязкопластичной нефти водой. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 3, 88—93.
 75. *Ентов В. М., Ильяев В. И., Мустафаев С. Д., Рахимов Н. Р.* Определение начального градиента давления при движении нефтей в пластовых условиях. — Нефтяное хозяйство, 1971, № 9, 53—55.
 76. *Ентов В. М., Малахова Т. А.* Некоторые задачи нестационарной фильтрации и гидродинамическое исследование пластов при нелинейной фильтрации. — Труды МИНХиГП, 1972, вып. 99, 132—138.
 77. *Ентов В. М., Малахова Т. А.* Некоторые задачи нелинейной фильтрации при кусочно-линейном законе сопротивления. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 2, 40—45.
 78. *Ентов В. М., Мирзаджанзаде А. Х., Мицевич В. И.* Об искривлении индикаторных диаграмм скважин в трещиновато-пористых коллекторах. — ПМТФ, 1971, № 4, 95—100.
 79. *Ентов В. М., Полищук А. М.* О роли сорбционных процессов при движении полимерных растворов в пористой среде. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 3.
 80. *Ентов В. М., Сузарев М. Г.* Автомодельный случай плоскорадиаль-

- ной нестационарной фильтрации при нелинейном законе сопротивления. — Изв. вузов, «Нефть и газ», 1965, № 4, 57—63.
81. Ентов В. М. Об исследовании скважин на нестационарный приток при нелинейном законе фильтрации. — Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и маш., 1964, № 6, 160—164.
 82. Ентов В. М., Турецкая Ф. Д. Численно-аналитическое решение задач нелинейной фильтрации, отображающихся на двустичную область плоскости годографа. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 1, 19—28.
 83. Желтов Ю. П. Деформации горных пород. М., «Недра», 1965.
 84. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Мизлин С. Г., Раковщик Л. С., Стеценко В. Я. Интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
 85. Зайцев Ю. В., Теслюк Е. В., Юферов Ю. К., Ильев В. И. Структурно-механические свойства нефти в пластовых условиях месторождения Узень. — Нефтяное хозяйство, 1968, № 10, 33—37.
 86. Ильинский Н. Б., Шешуров Е. Г. Задачи нелинейной фильтрации с неоднотипной областью годографа скорости. — Изв. вузов, «Математика», 1972, № 10, 125.
 87. Ильинский Н. Б., Шешуров Е. Г. О краевых задачах нелинейной фильтрации. «Вычислительная и прикладная математика». Изд. Киевского ун-та, вып. 19, 1973.
 88. Ильинский Н. Б., Фомин В. М., Шешуров Е. Г. О решении одной обратной задачи нелинейной теории фильтрации. — Труды семинара по краевым задачам. Изд. Киевского ун-та, вып. 8, 1971, 86—98.
 89. Ильюшин А. А. Деформация вязкопластического тела. — Уч. зап. МГУ, 1940, вып. 39, 3—81.
 90. Ильев В. И. Причины отсутствия фонтанирования скважин месторождения Узень. — Нефтепромышленное дело, 1968, № 10, 9—12.
 91. Ильев В. И. Исследование скважин месторождения Узень. — Нефтепромышленное дело, 1967, № 8, 3—5.
 92. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969.
 93. Кисиленко В. Е. Экспериментальное изучение характера продвижения водонефтяного контакта в пористой среде. — Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и маш., 1963, № 6, 80—84.
 94. Кисляков Ю. П., Демин Н. В., Русских В. Н. Влияние градиентов давления на величину параметров пласта на Туймазинском месторождении. — Нефтяное хозяйство, № 2, 1964.
 95. Клубоча Т. Т. Влияние глинистых примесей на коллекторские свойства песчано-алевролитовых пород. М., «Наука», 1970.
 96. Ковалев А. Г., Пейсизов С. И. Относительные фазовые проницаемости при фильтрации смесей неньютоновских жидкостей с водой и газом. — Сб. «Применение неньютоновских систем в добыче нефти». М., изд. ВНИИОЭНГ, 1970, 56—60.
 97. Ковалев А. Г., Повзров И. А. О подвижности ВНК и изменении свойств нефти в пределах некоторых месторождений Оренбургской области. — Нефтяное хозяйство, № 2, 1970, 50—53.
 98. Ковалев А. Г., Покровский В. В. Экспериментальная оценка застойных зон при заводнении пластов, насыщенных нефтями, обладающими структурно-механическими свойствами. — Нефтяное хозяйство, 1972, № 10, 43—48.
 99. Корнильцев Ю. А., Мазитов Т. Г., Молокович Ю. М. Электрическое моделирование одномерных нестационарных задач нелинейной фильтрации. — Сб. «Фильтрация аномальных жидкостей и задачи оптимизации». Изд. Казанского ун-та, 1973, 59—66.
 100. Корнильцев Ю. А., Молокович Ю. М. Электромоделирование прямолинейно-параллельных задач фильтрации неньютоновских жидкостей. Уч. зап. Казанского ун-та, 1970, т. 130, кн. 1, 33—34.
 101. Корнильцев Ю. А., Молокович Ю. М. Электромоделирование плоско-радиальных задач фильтрации неньютоновских жидкостей. — Сб. «Проб-

- лемы гидродинамики и рациональной разработки нефтяных месторождений», изд. Казанского ун-та, 1971, 44—50.
102. Котов А. И., Нерлин С. В. Водоупорные свойства глинистых почв и грунтов в прироста начального градиента фильтрации.— Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 9, 106—109.
 103. Котляр Л. М., Скворцов Э. В. О фильтрации вязкопластичной жидкости к стоку в криволинейном пласте.— ДАН СССР, 1973, т. 209, № 5, 1049—1052.
 104. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. I. Гостехтеориздат, 1955; т. II. Физматгиз, 1963.
 105. Красносельский М. А., Перов А. И., Полоцкий А. М., Забрейко П. П. Векторные поля на плоскости. М., Физматгиз, 1963.
 106. Куванышев У. П. Оценка влияния вязкопластических свойств Ромашкинской нефти на коэффициент вытеснения в неадиабатических условиях фильтрации.— Сб. «Применение не-newтоновских систем в добыче нефти». М., ВНИИОЭНГ, 1970, 211—214.
 107. Кудрявцев Г. В., Фаткуллин А. Х. Расчет остаточной насыщенности в неоднородном пласте при взаимном вытеснении жидкостей с вязкопластическими свойствами.— ПМТФ, 1970, № 4, 189—192.
 108. Кундин С. А., Аллахвердиева Р. Г., Борисов Ю. П., Изабакиров М., Корниченко Г. Л., Розенберг М. Д. Экспериментальное изучение фильтрации парафинистой нефти при температурах ниже температуры ее насыщения парафином.— Сб. научн. трудов ВНИИ, 1973, вып. 45, 40—52.
 109. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
 110. Кусаков М. М., Ребиндер П. А., Зинченко К. Е. Поверхностные явления в процессах фильтрации нефти.— ДАН СССР, 1940, т. 28, № 5, 432—436.
 111. Лаврентьев М. А. Варпацционный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. М., Изд-во АН СССР, 1962.
 112. Лаврентьев М. А., Шабат Е. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1958.
 113. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2-е. М., ГИТТЛ, 1954.
 114. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.
 115. Лебедев Н. Н. Специальные функции и некоторые их приложения. Физматгиз, 1963.
 116. Леви Б. И. Об одномерном вытеснении вязкопластичной нефти водой.— Труды БашНИПИнефть, вып. XXX, «Теория и практика разработки нефтяных месторождений». Уфа, 1972, 341—348.
 117. Леви Б. И., Суркова Ю. В., Станкевич К. А. Гидродинамические расчеты, связанные с заводнением нефтяных месторождений с newтоновскими нефтями.— Сб. «Теоретические и экспериментальные проблемы рациональной разработки нефтяных месторождений», ч. II. Изд. Казанского ун-та, 1972, 22—25.
 118. Лодж А. Эластичные жидкости. М., «Наука», 1969.
 119. Мамедов Г. А., Фарзиев Я. Г., Алиев В. А. Исследование остаточной насыщенности вязкопластичных жидкостей при вытеснении их из пористой среды газом (воздухом).— Изд. вузов, «Нефть и газ», 1967, № 5.
 120. Мамедов Э. И., Мустафаев С. Д. Об установлении взаимодействия между скважинами месторождения Балаханы — Сабунчи — Раманы.— Азербайджанское нефтяное хозяйство, 1969, № 12, 28—30.
 121. Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти. Пер. с англ. М., Гостоптехиздат, 1953.
 122. Мендельсон М. М. Исследование структуры пористой среды и фильтрационного потока. Автореферат диссертации. Уфа, 1971.
 123. Мендельсон М. М., Шафидер М. И. Фильтрация с предельным градиентом в средах со случайными неоднородностями.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 5, 159—166.
 124. Миддлми С. Течение полимеров. М., «Мир», 1971.

125. *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М., ИЛ, 1962.
126. *Минский Е. М.* О турбулентной фильтрации в пористых средах.— ДАН СССР, 1951, т. 78, № 3, 409—412.
127. *Минский Е. М.* О турбулентной фильтрации газа в пористых средах.— Труды ВНИИ природных газов. «Вопросы добычи, транспорта и переработки природных газов». М., Гостоптехиздат, 1951, 3—19.
128. *Мингареев Р. Ш., Валиханов А. В., Вахитов Г. Г., Мирзаджанзаде А. Х., Зайцев Ю. В., Енотов В. М., Грайфер В. И., Дияшев Р. Н.* Гидродинамические особенности разработки слоистых пластов с проявлением начального градиента давления. Казань. Татарское книжное издательство, 1972.
129. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., ИЛ, 1957.
130. *Мирзаджанзаде А. Х.* О теоретической схеме явления ухода раствора.— ДАН АзССР, 1953, т. IX, № 4, 203—205.
131. *Мирзаджанзаде А. Х., Амиров А. Д., Ахмедов З. М., Баренблатт Г. И., Курбанов Р. С., Енотов В. М., Зайцев Ю. В.* Об особенностях разработки нефтяных и газовых месторождений в условиях проявления начального градиента давления при движении нефти и газа. Доклад на VIII Мировом нефтяном конгрессе. М., 1971.
132. *Мирзаджанзаде А. Х., Мирзоян А. А., Гевинян Г. М., Сеид-Рза М. К.* Гидравлика глинистых и цементных растворов. М., «Недра», 1967.
133. *Мирзаджанзаде А. Х., Ковалев А. Г., Зайцев Ю. В.* Особенности эксплуатации месторождений аномальных нефтей. М., «Недра», 1972.
134. *Мирзаджанзаде А. Х., Хасиев А. М., Гурбанов Р. С., Ахмедов З. М.* Гидродинамические особенности разработки месторождений невязконовских нефтей.— Нефтяное хозяйство, 1968, № 8.
135. *Мифтахутдинов Б. А., Молокович Ю. М., Скворцов Э. В.* Некоторые вопросы плоской стационарной нелинейной фильтрации.— Сб. «Проблемы гидродинамики и рациональной разработки нефтяных месторождений». Изд. Казанского ун-та, 1971, 51—70.
136. *Михайлов Г. К.* К задаче о фильтрации в анизотропных земляных плотинах трапециoidalного профиля на горизонтальном водоупоре.— ДАН СССР, 1951, т. 80, № 4, 553—556.
137. *Михайлов Г. К., Николаевский В. Н.* Движение жидкостей и газов в пористых средах. «Механика в СССР за 50 лет», т. II. М., «Наука», 1970, 585—648.
138. *Молокович Ю. М.* Одномерная фильтрация несжимаемой вязкопластичной жидкости. Изд. Казанского ун-та, 1969.
139. *Молокович Ю. М., Скворцов Э. В.* Приближенные решения одномерных задач фильтрации упругой ньютоновской жидкости.— Сб. «Применение неньютоновских систем в добыче нефти». М., ВНИИОЭНГ, 1970, 139—151.
140. *Молокович Ю. М., Скворцов Э. В.* Решение одной плоской стационарной задачи нелинейной фильтрации.— Уч. зап. Казанского ун-та, 1970, т. 130, кн. 1, вып. 7, 65—72.
141. *Молокович Ю. М., Скворцов Э. В.* К вопросу одномерной нестационарной фильтрации жидкостей с начальным градиентом сдвига. Изв. вузов, «Нефть и газ», 1970, № 6, 67—72.
142. *Молокович Ю. М., Скворцов Э. В.* Об одномерной нестационарной фильтрации жидкости с переменным градиентом сдвига.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 5, 166—172.
143. *Молокович Ю. М., Скворцов Э. В.* К вопросу одномерной нестационарной фильтрации жидкости с переменным градиентом сдвига.— Уч. зап. Казанского ун-та, 130, № 1, 1970, 52—64.
144. *Молокович Ю. М., Скворцов Э. В.* Одномерная фильтрация сжимаемой вязкопластичной жидкости. Изд. Казанского ун-та, 1971.
145. *Молокович Ю. М., Скворцов Э. В., Чипал А. Я.* Некоторые прибли-

- женные решения одномерных задач фильтрации упругой вязкопластичной жидкости. Уч. зап. Казанского ун-та, 1969, т. 129, кн. 2, 3—24.
146. Морс М. Топологические методы в теории функций комплексного переменного. М., ИЛ, 1955.
 147. Мусин М. М., Фаткуллин А. Х. Расчет перемещения границы раздела вязкопластичных жидкостей методом сеток. — Сб. докладов на VI конференции молодых ученых ТатНИИ, 1969. Казань, 1971, 106—112.
 148. Мусин М. М., Фаткуллин А. Х. Решение одномерной задачи фильтрации двухфазной псевдобьютовской жидкости. — Труды ТатНИПИнефть, 1973, вып. XXII. «Геология, разработка нефтяных месторождений, гидродинамика и физика пласта», 239—242.
 149. Мустафаев С. Д. Простые стационарные фильтрационные потоки несжимаемой вязкопластичной жидкости в однородной и простейших случаях неоднородной пористой среды. — Изв. вузов, «Нефть и газ», 1965, № 7, 71—78.
 150. Мухомлишвили Н. Н. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
 151. Мясников В. П. Некоторые точные решения для прямолинейных движений вязкопластичной среды. — ПМТФ, 1961, № 2, 54—60.
 152. Мосолов П. П., Мясников В. П. Вариационные методы в теории течений вязкопластичной среды. — ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, 468—492.
 153. Мясников В. П., Мосолов П. П. Вариационные методы в теории течений жестко-вязкопластичных сред. Изд. МГУ, 1971.
 154. Нейбер Г. Теория концентрации напряжений в призматических стержнях, работающих в условиях сдвига, для любого нелинейного закона, связывающего напряжения и деформации. — Сб. перев. «Механика», 1961, № 4, 117—130.
 155. Непримеров Н. Н. Экспериментальные исследования некоторых вопросов подземной гидромеханики и физики системы пласта — скважина. Автореферат докторской диссертации. МИНХиПИ, 1962.
 156. Непримеров Н. Н., Шарagin А. Г. Особенности внутриконтурной разработки нефтяных пластов. Изд. Казанского ун-та, 1961.
 157. Николаевский В. Н. К построению нелинейной теории упругого режима фильтрации жидкости и газа. — ПМТФ, 1961, № 4, 67—76.
 158. Николаевский В. Н., Васильев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М., «Недра», 1970.
 159. Николаевский В. Н., Горбунов А. Т. О нелинейной теории упругого режима фильтрации. — «Добыча нефти». Ежегодник. М., «Недра», 1964, 73—95.
 160. Нусин М. Т., Тумашев Г. Г. Обратные краевые задачи. Уч. зап. Казанского ун-та, 1955, т. 115, вып. 6, 333.
 161. Нусин М. Т., Ильинский Н. Б. Методы построения подземного контура гидротехнических сооружений. — Сб. «Обратные краевые задачи теории фильтрации». Изд. Казанского ун-та, 1963, 139.
 162. Осипалов П. М., Мирзэджанзаде А. Х. Нестационарные движения вязкопластичных сред. Изд. МГУ, 1970.
 163. Особенности разработки месторождений неньютоновских нефтей. (Тематический обзор). М., ВНИИОЭНГ, 1971.
 164. Панько С. В. Об одном законе фильтрации с предельным градиентом. Материалы II научной конференции Томского университета по математике и механике. Томск, вып. 2, 1972, 52—54.
 165. Панько С. В. О некоторых задачах фильтрации с предельным градиентом. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 4, 177—181.
 166. Пейсагов С. И., Ковалев А. Г. Экспериментальное исследование относительных фазовых проницаемостей при вытеснении вязкопластичных жидкостей газом. — Труды Азинефтехим, 1967, вып. 26, 44—56.
 167. Пеньковский В. И., Рыбикова С. Т. О влиянии начальных градиентов напора на фильтрацию в слоистых грунтах. — Сб. «Динамика сплошной среды», вып. 2. Новосибирск, «Наука», 1969, 100—113.

168. Пеньковский В. И. Фильтрация в напорном пласте с учетом начальных градиентов кровли и подошвы. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6, 173—177.
169. Плещинский Б. И., Назаровский Г. А., Штейнберг Л. И. Экспериментальные исследования вытеснения вязкопластичных жидкостей из пористой среды. — Сб. «Фильтрация аномальных жидкостей и задачи оптимизации». Изд. Казанского ун-та, 1973, 86—88.
170. Положий Г. Н. Метод движения граничных точек и мажорантных областей в теории фильтрации. — Укр. матем. ж., 1953, т. 5, № 4, 380—400.
171. Положий Г. Н. О движении граничных точек отображаемых областей. Успехи математических наук, 1952, т. VII, вып. 6, 203—205.
172. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехтеориздат, 1952.
173. Полянин В. Д. Приближенный метод решения нестационарных задач фильтрации при наличии начального градиента давления. — Изв. вузов, «Нефть и газ», 1969, № 2, 69—73.
174. Полянин В. Д. О характере движения границы раздела при нелинейной фильтрации. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4, 181—183.
175. Полянин В. Д. Задачи нестационарной фильтрации аномальных жидкостей. Автореферат канд. диссертации. М., МИНХиГП, 1969.
176. Полянин В. Д. Исследование особенностей одномерного фильтрационного потока жидкости с начальным градиентом. — Сб. «Фильтрация аномальных жидкостей и задачи оптимизации». Изд. Казанского ун-та, 1973, 89—91.
177. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. Сборник под ред. П. Я. Кочкиной. М., «Наука», 1969.
178. Рейнер М. Деформация и течение. М., Гостоптехиздат, 1963.
179. Реферативный сборник научно-исследовательских работ за 1968 г. М., ИГиРГИ, 1969.
180. Роза С. А. О роли начального градиента в процессах фильтрации через растворимые горные породы. — Сб. «Растворение и выщелачивание горных пород». М., 1957, 114—121.
181. Роза С. А. Осадки гидротехнических сооружений на глинах с малой влажностью. — Гидротехническое строительство, 1950, № 9, 25—30.
182. Руховец А. Н., Уфлянд Я. С. Об одном классе парных интегральных уравнений и их приложениях в теории упругости. — ПММ, 1966, т. 30, вып. 2, 271—277.
183. Рыжик В. М. Гидродинамическое исследование нефте- и газоотдачи пластов. Автореферат докторской диссертации. М., ИГиРГИ, 1973.
184. Рыжик В. М. Обзор работ по взаимному вытеснению несмешивающихся жидкостей из пористой среды. — Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и маш., 1961, № 2, 130—141.
185. Рыжик В. М., Кисиленко Б. Е. Исследование устойчивости продвижения границы раздела воды и нефти в пористой среде. — Сб. «Физико-геологические факторы при разработке нефтяных и нефтегазоконденсатных месторождений». М., «Недра», 1969, 82—91.
186. Саломхвалов В. В. Исследование стационарного теплообмена при пористом охлаждении в условиях фазового превращения охладителя. Автореферат канд. диссертации. Воронеж, ВПИ, 1970.
187. Саттаров М. М., Андреев Е. А., Ключарев В. С., Панова Р. К., Тимашиев Э. М. Проектирование разработки крупных нефтяных месторождений. М., «Недра», 1969.
188. Сегалов А. Е. О зависимости концентрации напряжений и деформаций от упруго-пластических свойств материалов. — Сб. «Всесоюзный рабочий симпозиум по вопросам малоциклового усталости» (Сообщения и выступления). Каунас, Каунасский политехнический ин-т, 1971.
189. Сегалов А. Е. Продольный сдвиг слоя упруго-пластического материала с линейным упрочнением под действием сосредоточенной силы. — Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1973, № 5, 167—171.

190. *Сегалов А. Е.* Некоторые задачи продольного сдвига упруго-пластических тел. Автореферат канд. диссертации. М., ИПМ АН СССР, 1973.
191. *Седов Л. Н.* Методы подобия и размерности в механике. Гостехтеориздат, 1957.
192. *Седов Л. Н.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехтеориздат, 1950.
193. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, тт. 1—2. М., «Наука», 1970.
194. *Скворцов Э. В.* О плоской стационарной задаче вытеснения вязкопластичной жидкости водой.— Сб. «Фильтрация аномальных жидкостей и задачи оптимизации». Изд. Казанского ун-та, 1973, 115—123.
195. *Скворцов Э. В., Шкуро А. С.* К определению гидродинамических параметров пласта и градиента сдвига. Изв. вузов, «Нефть и газ», 1969, № 9, 65—68.
196. *Соколовский В. В.* О нелинейной фильтрации грунтовых вод.— ПММ, 1949, т. 13, вып. 5, 525—536.
197. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. М., «Высшая школа», 1969.
198. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. М., ИЛ, 1955.
199. *Султанов Б. И.* О фильтрации вязкопластических жидкостей в пористой среде.— Изв. АН АзССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, 1960, № 5, 125—130.
200. *Титчмарш Э. И.* Введение в теорию интегралов Фурье. М., 1948.
201. *Титчмарш Э. И.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. 1. М., ИЛ, 1960.
202. *Требин Ф. А.* Нефтепроницаемость песчаных коллекторов. Гостоптехиздат, 1945.
203. *Уилкинсон У. Л.* Неньютоновские жидкости. М., «Мир», 1964.
204. *Утебаев С. У., Юферов Ю. К., Стуканов Ю. А., Ильяев В. И.* О разработке XVII горизонта месторождения Узень.— Нефтепромысловое дело, 1969, № 8, 6—8.
205. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
206. *Фаткуллин А. Х., Кудрявцев Г. В.* К вопросу вытеснения нефти в пласте при наличии градиента давления сдвига.— Сб. «Применение неньютоновских систем в добыче нефти». М., ВНИИОЭНГ, 1970, 206—211.
207. *Фаткуллин А. Х., Мусин М. М.* Численное решение уравнения фильтрации двухфазной неньютоновской жидкости. НТС по добыче нефти ВНИИ. М., «Недра», 1971, 57—65.
208. *Флорин В. А.* Уплотнение земляной среды и фильтрация при переменной пористости с учетом влияния связанной воды.— Изв. АН СССР, ОТН, 1951, № 11, 1625—1649.
209. *Фоменко И. Е.* Фильтрация девонской нефти через пористую среду.— Нефтяное хозяйство, 1968, № 8, 28—32.
210. *Фоменко И. Е.* Реологические параметры нефти и эмульсий Ромашкинского месторождения.— Сб. «Применение неньютоновских систем в добыче нефти». М., ВНИИОЭНГ, 1970, 117—125.
211. *Фоменко И. Е.* Исследование фильтрации нефти Ромашкинского месторождения в пористых средах.— Сб. «Применение неньютоновских систем в добыче нефти». М., ВНИИОЭНГ, 1970, 99—109.
212. *Фоменко И. Е.* Взаимодействие двух скважин при фильтрации неньютоновской жидкости.— Сб. «Применение неньютоновских систем в добыче нефти». М., ВНИИОЭНГ, 1970, 125—133.
213. *Фоменко И. Е.* Исследование нижней границы применимости закона Дарси.— Труды ТатНИИ, вып. 12. «Недра», 1968, 296—303.
214. *Фоменко И. Е., Дияшев Р. Н.* Некоторые результаты промысловых исследований по определению начального перепада давления.— Нефтяное хозяйство, 1968, № 4, 33—35.
215. *Хабидуллин З. А.* Исследование факторов, влияющих на фильтрацию структурированных пластовых нефтей. Автореферат канд. диссертации. Уфа, УНИ, 1970.

216. Хорнеш Я. Исследование фильтрации асфальтосодержащих жидкостей. Нефтяное хозяйство, 1966, № 10, 71—76.
217. Хорнеш Я. Изучение фильтрации нефтей, содержащих тяжелые компоненты. Автореферат канд. диссертации М., ВНИИ, 1968.
218. Христианович С. А. Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси.— ПММ, 1940, т. 4, вып. 1, 33—52.
219. Чаплыгин С. А. О газовых струях. М., Гостехиздат, 1949.
220. Чарный И. А. Подземная гидродинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
221. Чилап А. Я. Фильтрационно-полупроводниковая аналогия.— ДАН СССР, 1972, т. 204, № 4, 807—808.
222. Чилап А. Я., Непримеров Н. Н., Молокович Ю. М. Определение зоны притока к скважине с начальным градиентом сдвига.— Труды Азнефтехим, 1967, вып. 26, 173—177.
223. Чураев Н. В. Фильтрация структурированных жидкостей через гетеропористые тела.— Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и маш., 1964, № 1, 136—140.
224. Чураев Н. В., Яценко А. И. Экспериментальное изучение процессов фильтрации вязкопластичных жидкостей через пористые тела.— Коллоидный журнал, 1966, т. 28, № 2, 302—307.
225. Шевченко А. К. Исследование процесса осушки призабойной зоны пласта с целью повышения продуктивности газовых скважин. Автореферат кандидатской диссертации. М., МИНХиГП, 1970.
226. Шейдеггер А. Е. Физика течения жидкостей через пористые среды. М., Гостоптехиздат, 1968.
227. Шешуков Е. Г., Фомин В. М. К нелинейной теории фильтрации.— Сб. «Вакуумная техника», вып. 2. Таткинигоиздат, 1970, 83—89.
228. Шилов Г. Е. Математический анализ. Специальный курс. М., Физматгиз, 1960.
229. Шкуро А. С. Определение градиента сдвига из формулы упругого запа-са жидкости в пласте.— Сб. «Фильтрация аномальных жидкостей и задачи оптимизации». Изд. Казанского ун-та, 1973, 192—194.
230. Щелкачев В. Н., Харин О. Н., Полянин В. Д. Некоторые особенности фильтрации неньютоновских жидкостей.— Сб. «Подземная гидродинамика», «Недра», 1971, 12—16.
231. Эфрос Д. А. Исследования фильтрации неоднородных систем. Л., Гостоптехиздат, 1963.
232. Benis A. M. Laminar flow of power-law fluids through narrow three-dimensional channels of varying gap.— Chemical Eng. Sci., 1967, v. 22, N 6, 805—822.
233. Bondarenko N., Nerpin S. Rheological properties of water in porous media — Bull R. I. L. E. M. 1965, N 29, 13—16.
234. Burcik E. F. The use of polymers in the recovery of petroleum.— Earth Mineral Sci., April 1968, 57.
235. Coleman B. D., Markowitz H., Noll W. Viscometric flows of Non-Newtonian fluids. Berlin, Springer, 1966.
236. Desremaux L., Chauveteau C., Martin M. Comportement des solutions de polymères en milieu poreux.— R. I. Fr. Petr., 1971, t. XXVI, N 6, 495—529.
237. Elnaggar H., Karadi G., Krizek R. Effect of non-Darcian behaviour on the characteristics of transient flow.— J. Hydrology, 1971, v. 13, N 2, 127—138.
238. Engelhardt W., Tunn W. Über das Strömen von Flüssigkeiten durch Sandsteine.— Heidelberger Beiträge zur Mineralogie und Petrographie, 1954, Bd. 4, H. 1/2, 12—25.
239. Englund F. On the laminar and turbulent flows of ground water through homogeneous sand.— Trans. Danish Academy Tech. Sci., 1953, N 3, 3—105.
240. Gheorghita St. I. Metode matematice in hidrogazodinamica subterana. Ed. Academiei Republicii Soc. România, Buc., 1966, 582.

241. *Gheorghitzu St. I.* Motions with initial gradient.— Quarterly J. Mech. Appl. Mathem., 1959, v. 12, pt. 3, 280—285.
242. *Gogarty W. B.* Mobility control with polymer solutions.— SPEJ, 1967, N 2, p. 161.
243. *Hansbo S.* Consolidation of clay with special reference to the influence of vertical sans drains.— Proc. Swedish Geotechnical Institute, 1960, v. 18, 41—46.
244. *Habib J., Tirriot C.* Ecart à la loi de Darcy pour les argiles.— 13th Congr. Intern. Assoc. Hydraul. Res., Kyoto, 1969, Proc. v. 4. Kyoto, 1969, 451—459.
245. *Harvey A. H., Menzie D. E.* Polymer solutions flow in porous media.— SPEJ, 1970, v. 2, 111.
246. *Jaquin C.* Interactions entre l'argile et les fluides écoulements à travers les argiles compactes. Etude bibliographique.— Rev. Inst. Frans. du Pétrole, 1965, t. 20, N 10, 1475—1501.
247. *Klein F.* Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion. Leipzig, 1933.
248. *Lenau C., Street R.* A non-linear theory for symmetric, supercavitating flow in a gravity field.— J. Fluid Mech., 1965, v. 21, N 2, 257.
249. *Marschall R. J., Metzner J. B.* Flow of viscoelastic fluids through porous media.— ILEC, Fundamentals, Aug. 1967, v. 6 (3), 393—400.
250. *Li S. P.* Measuring extremely low velocity of water in clays.— Soil Science, 1963, v. 95, 410—413.
251. *Mauersberger P.* A variational principle for steady state groundwater flow with a free surface.— Pure and Appl. Geophysics, 1965, v. 60, p. 101—106.
252. *Mauersberger P.* The use of variational methods and of error distribution principles in groundwater hydraulics.— Bull. Int. Ass. Sci. Hydrology, June, 1968, v. 13, N 2, 169.
253. *Mauersberger P.* Eine hydrologische Anwendung der Trefftzchen Variationsmethoden.— Gerlands Beiträge z. Geophysik, 1968, v. 77, 235.
254. *Miller R. J., Low P. F.* Threshold gradient for water flow in clay systems.— Soil Sci. Soc. Am. Proc., 1963, v. 27, 605—609.
255. *Mitchell J. K., Younger J. S.* Abnormalities in hydraulic flow through fine-grained soils. «Permeability and Capillarity of Soils» ASTM-Symposium, 1967.
256. *Mungan N., Smith F. W., Thompson J. L.* Some aspects of polymer floods.— JPT, 1966, N 9.
257. *Mungan N.* Le contrôle de la mobilité dans les injections de polymères.— RIFP, 1971, t. 24, 2, 232—250.
258. *Nemenyi P.* Über die Gültigkeit des Darcy'schen Gesetzes und deren Grenzen.— Wasserkraft u. Wasserwirtschaft, 1934, Bd. 29 (14), 157—159.
259. *Neuber H.* A physically non-linear notch and crack model.— J. Mech. and Phys. Solids, 1968, v. 16, N 4, 289—294.
260. *Neuber H.* Kerbspannungslehre. 2 Aufl. B., Springer, 1958.
261. *Odeh A. S.* Effect of viscosity ratio on relative permeability.— Tr. AIME, 1959, v. 216, 346—353.
262. *Olsen H. W.* Deviations from Darcy's Law in Saturated Clays.— Proc. Soil Sci. Soc. Am., 1965, v. 29, 135—140.
263. *Olsen H. W.* Darcy's law in saturated kaolinite.— Water Resources Res., 1966, v. 2, 287—295.
264. *Oldroyd J. G.* Rectilinear plastic flow of a Bingham Solid.— Proc. Cambr. Phil. Soc., 1947, v. 43, N 3, 4; 1948, v. 44, N 2; 1949, v. 45, N 4; 1951, v. 47, N 2.
265. *van Poolen H. K., Jurgon J. R.* Steady-state and unsteady-state flow of non-Newtonian fluids through porous media.— SPEJ, 1969, v. 9, N 1, 80—88.
266. *Prager W.* On slow visco-plastic flow. Studies in Mathematics and Applied Mechanics, Mises Anniversary Volume, Acad. Press, N. Y., 1954.

267. *Pye D. J.* Improved secondary recovery by control of water mobility.— *J. Petr. Techn.*, 1964, N 8.
268. *Rice J.* Stresses due to a sharp notch in a work-hardening elastic-plastic material loaded by longitudinal shear.— *J. Appl. Mech.*, 1967, v. 34, N 4, 287—292.
269. *Ringleb F.* Exakte Lösungen der Differentialgleichungen einer adiabatische Strömung.— *ZAMM*, 1940, Bd. 20, H. 4.
270. *Sadowski T. J.*, *Bird R. B.* Non-Newtonian flow through porous media, I, II.— *Trans. Soc. Rheol.*, 1965, v. 9, N 2.
271. *Saffman P. G.*, *Taylor G. I.* The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid.— *Proc. Roy. Soc. London*, 1958, v. 245, 312—329.
272. *Savins J. G.* Non-Newtonian flow through porous media.— *Ind. Eng. Chem.*, 1969, v. 61, N 10, 18—47.
273. *Smith F. B.* The behaviour of partially hydrolyzed polyacrilamide solutions in porous media.— *J. Petr. Techn.*, 1970, N 2, 178.
274. *Sneddom I. N.* Mixed boundary value problems in potential theory. Amsterdam, N. Y., 1966.
275. *Taber J. J.* Dynamic and static forces required to remove a discontinuous oil phase from porous media containing both oil and water.— *Soc. Petrol. Engin. J.*, 1969, r. № 2.
276. *Wissler E. H.* Viscoelastic effects in the flow on non-Newtonian fluids through a porous medium.— *Ind. and Engng. Chem. Fundam.*, 1971, v. 10, N 3, 411—417.

Содержание

Предисловие	3
Глава I	
Физика течения аномальных жидкостей через пористые среды . . .	5
§ 1. Аномальные жидкости	5
§ 2. Пористые среды	7
§ 3. Нелинейные законы фильтрации	8
Глава II	
Основные уравнения фильтрации аномальных жидкостей (нелинейной фильтрации) и их свойства	20
§ 1. Основные уравнения. Аналогия с другими задачами математи- ческой физики	20
§ 2. Основные свойства уравнений нелинейной фильтрации в ста- ционарном случае	22
§ 3. Вариационный принцип для задач стационарной нелинейной фильтрации и некоторые его следствия	24
§ 4. Некоторые следствия из общих свойств уравнений нелинейной фильтрации	28
Глава III	
Плоская задача нелинейной стационарной фильтрации	33
§ 1. Основные соотношения	33
§ 2. Задачи, допускающие отображение на плоскость годографа . .	36
§ 3. О некоторых эквивалентных формулировках	39
§ 4. Элементарные решения плоских задач нелинейной фильтрации	43
Глава IV	
Построение точных решений в плоскости годографа	51
§ 1. Интегральное преобразование по переменной w при фильтра- ции с предельным градиентом	52
§ 2. Некоторые сведения об используемых гипергеометрических функциях	54
§ 3. Обобщение интегрального преобразования по переменной w	59
§ 4. Некоторые точные решения задач фильтрации с предельным градиентом	64
§ 5. Точные решения задачи нелинейной фильтрации при нелиней- ных законах, отличных от закона фильтрации с предельным гра- диентом	75

Глава V

Приближенные решения плоских задач фильтрации с предельным градиентом	77
§ 1. Формулировка основных задач	77
§ 2. Приложения. Задача А	85
§ 3. Приближенное решение задачи в плоскости годографа при малых значениях предельного градиента	98
§ 4. Построение приближенных решений методом внешних и внутренних разложений	100
§ 5. Предельные решения и оценки для застойных зон	104

Глава VI

Решение задач фильтрации с предельным градиентом в случае неоднородности отображения	108
§ 1. Формулировка задачи. Отображение на многолистную поверхность	108
§ 2. О решении задач на двулистной поверхности	114

Глава VII

Некоторые задачи вытеснения несмешивающихся жидкостей при нелинейной фильтрации	116
§ 1. Уравнения совместного движения несмешивающихся вязкопластических жидкостей	116
§ 2. Устойчивость фронтального вытеснения	124
§ 3. Некоторые примеры расчета процесса вытеснения	130
§ 4. Моделирование вытеснения вязкопластичной жидкости вязкой	132
§ 5. Целики и предельный коэффициент охвата при вытеснении вязкопластических жидкостей вязкими	135
§ 6. Оценка влияния предельного градиента на конечный коэффициент охвата заводнением на примере II пласта Арланской площади	152

Глава VIII

Течение аномальных жидкостей в гетерогенной пористой среде	155
§ 1. Течение однородной жидкости в тонком слоистом пласте	155
§ 2. Застойные зоны в слоистом пласте	158
§ 3. Квазиодномерное вытеснение в слоистом пласте	161
§ 4. Движение в пласте с изолированными пропластками	163

Глава IX

Некоторые задачи нестационарного движения аномальных жидкостей. Возможности определения параметров пласта	168
§ 1. Автомодельные решения задач нестационарной фильтрации аномальных жидкостей	168
§ 2. Некоторые неавтомодельные задачи движения аномальных жидкостей	172
Заключение	181
Литература	185

*Марк Григорьевич Вернадинер,
Владимир Мардухозич Ентов*

**Гидродинамическая теория фильтрации
аномальных жидкостей**

*Утверждено к печати
Институтом проблем механики АН СССР*

Редактор Г. А. Дрейцер
Художник О. Белозерская
Художественный редактор А. Н. Жданов
Технический редактор Ю. В. Рылина.
Корректор А. А. Смогилева.

Сдано в набор 25/II 1975 г. Подписано к печ.
24/IV 1975 г. Формат 60×90^{1/16} Бумага № 2.
Усл. печ. л. 12,5. Уч.-изд. л. 12,2
Тираж 1450 экз. Т-07042 Тип. зак. 1852
Цена 1 р. 22 к.

Издательство «Наука»
103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., д. 21
2-я типография издательства «Наука»,
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
10	Ф-ла (3.6)	$\frac{\mu Gw}{kw}$	$\frac{Gw}{w}$
24	Ф ла (2.8)	$w \Phi (w)$	$w\Phi' (w)$
187	30 св.	Горбунов	Гурбанов
191	18 св.	Курбанов	Гурбанов
197	17 св.	Sheddom	Sneddon

М. Е. Бернадинер